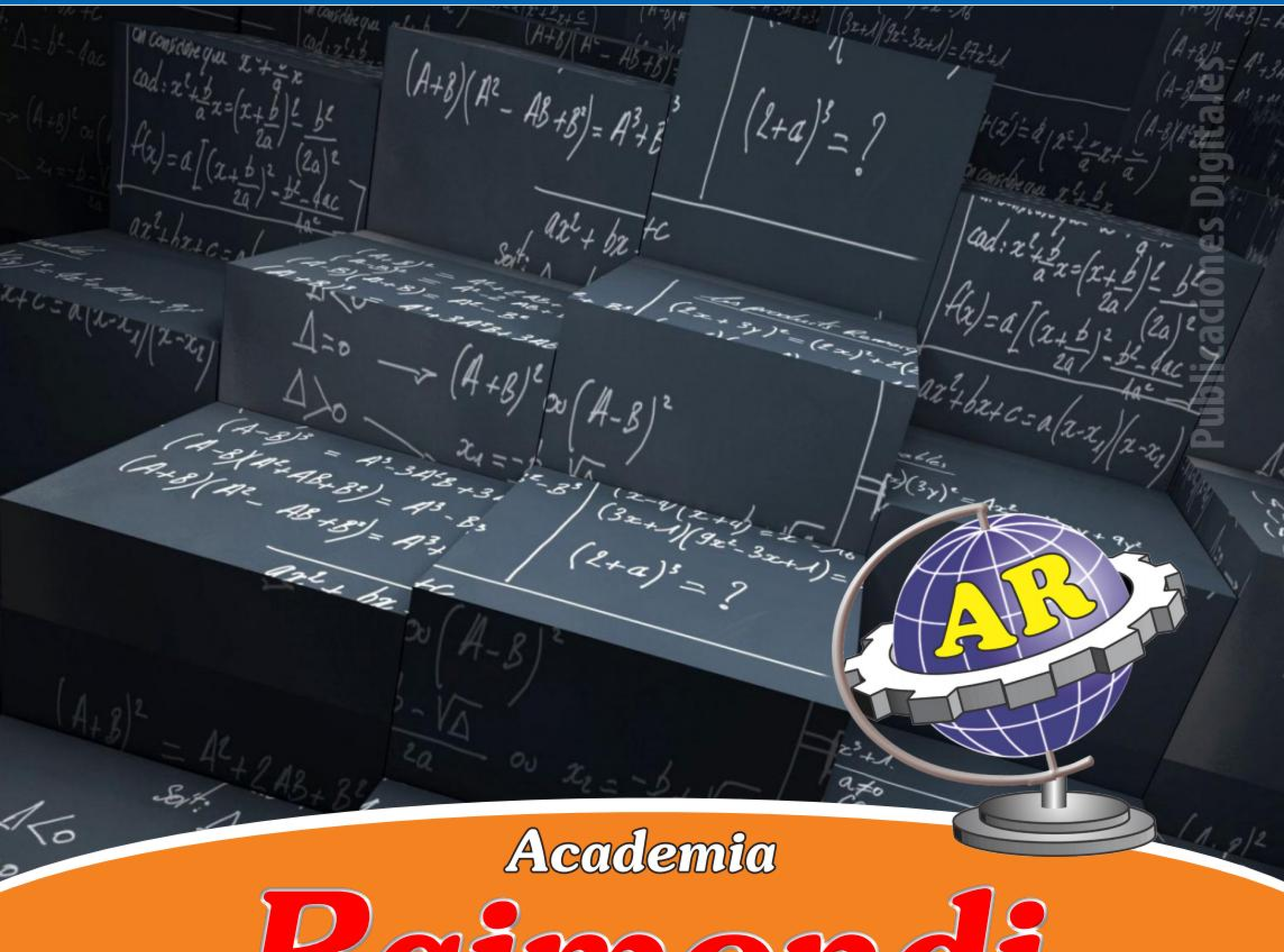
Formulario

ÁLGEBRA



Academia

Raimondi

... siempre los primeros

Academia
Raimondi

Título de la Obra:

Formulario de Álgebra
Edición 2018

Academia Preuniversitaria
Antonio Raimondi E.I.R.L.
Plaza San Francisco Nº 138.
Telf.: (084)247458 y (084)224961
www.academiaraimondi.pe

Introducción

Introducción

El Álgebra es la generalización de las matemáticas cuyas raíces pueden rastrearse hasta la antigua matemática babilónica, que había desarrollado un avanzado sistema aritmético con el que fueron capaces de hacer cálculos en una forma algorítmica. Con el uso de este sistema lograron encontrar fórmulas y soluciones para resolver problemas que hoy en día suelen resolverse mediante ecuaciones lineales, ecuaciones de segundo grado y ecuaciones indeterminadas. En contraste, la mayoría de los egipcios de esta época, y la mayoría de los matemáticos griegos y chinos del primer milenio antes de Cristo, normalmente resolvían tales ecuaciones por métodos geométricos, tales como los descritos en el Papiro de Rhind, Los Elementos de Euclides y Los nueve capítulos sobre el arte matemático.

La Corporación Educativa RAIMONDI de Cusco tiene el agrado de poner en consideración de todos los estudiantes del Cusco, el Perú y el Mundo, este Formulario de Álgebra que describe, en general, los temas que constituyen un curso de Álgebra de nivel pre-universitario.

Este formulario responde a una necesidad que hemos sentido agudamente todos los que nos avocamos a la enseñanza de las Matemáticas en las aulas de la academia y colegio RAIMONDI de Cusco. La experiencia nos ha demostrado que el aprendizaje de las matemáticas, requiere no solamente de conocimientos teóricos, sino fundamentalmente de la capacidad de resolver situaciones matemáticas, denominadas, ejercicios o problemas.

La práctica constante de resolver ejercicios y problemas es la única manera de profundizar y cimentar los conceptos teóricos bien aprendidos, es por ello que en el desarrollo de esta publicación, ustedes deberán tener en cuenta las sugerencias planteadas y analizarlas.

Tenga presente que el objetivo en el estudio de las Matemáticas no es mecanizarse, sino en saber aplicar correcta y lógicamente una determinada definición, propiedad o teorema a cada problema que se esté resolviendo. Solo así, el estudiante encontrará en las Matemáticas una recreación amena y ágil.

Víctor Paredes Aucasime
Promotor - Director

Índice de Contenidos

Leyes de Exponentes y Ecuaciones Exponenciales

POTENCIACIÓN

Es la operación matemática que tiene por objetivo encontrar una expresión llamada potencia (p), conociendo previamente otras dos expresiones denominadas base (b) y exponente (n).

$$b^n = p;\ \text{donde} \begin{cases} b = \text{base};\ b \in \mathbb{R} \\ n = \text{exponente};\ n \in \mathbb{Z} \\ p = \text{potencia};\ p \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Así pues, en $2^3 = 8$: 2 es la base, 3 es el exponente y 8 es la potencia.

DEFINICIONES

1. Exponente cero

$$a^0 = 1;\ a \neq 0$$

Ejemplo: $5^0 = 1;\ (-3)^0 = 1;\ -7^0 = -1$

2. Exponente uno

$$a^1 = a$$

Ejemplo: $4^1 = 4$

3. Exponente entero positivo

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{"n" veces}};\ n \geq 2$$

Ejemplo: $7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$

4. Exponente negativo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n};\ a \neq 0$$

Ejemplo: $2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2};\ \ 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

TEOREMAS

1. Multiplicación: Bases iguales

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Ejemplo: $x^4 \cdot x^2 = x^{4+2} = x^6$

2. División: Bases iguales

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};\ a \neq 0$$

Ejemplo: $\frac{x^{10}}{x^7} = x^{10-7} = x^3$

3. Potencia de potencia

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

Ejemplo: $\left(x^2\right)^5 = x^{2 \cdot 5} = x^{10}$

4. Multiplicación: Exponentes iguales

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

Ejemplo: $a^3b^3c^3 = (abc)^3$

$$\left(x^2y^3\right)^5 = \left(x^2\right)^5\left(y^3\right)^5 = x^{10}y^{15}$$

5. División: exponentes iguales

$$\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n;\ b\neq 0$$

Ejemplos:

$$\frac{x^3}{y^3}=\left(\frac{x}{y}\right)^3;\ \left(\frac{x^4}{y^3}\right)^2=\frac{\left(x^4\right)^2}{\left(y^3\right)^2}=\frac{x^8}{y^6}$$

RADICACIÓN

Es una de las operaciones matemáticas inversas a la potenciación cuyo objetivo es encontrar una expresión llamada raíz (b), conociendo otras dos expresiones denominadas radicando (a) e índice (n).

$$\sqrt[n]{a}=b;\ \text{donde}\begin{cases}\sqrt{\ }=\text{signo radical}\\ n=\text{índice};\ n\in\mathbb{Z}^+\\ a=\text{Radicando}\\ b=\text{raíz};\ b\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Así pues: en $\sqrt[3]{64}=4$: 3 es el índice, 64 el radicando y 4 la raíz.

DEFINICIONES:

1. $\forall a,b\in\mathbb{R};\ n\in\mathbb{Z}^+$

$$\sqrt[n]{a}=b\Leftrightarrow a=b^n$$

Ejemplos:

$\sqrt[m]{x}=p\Leftrightarrow x=p^m$

$\sqrt{9}=3\Leftrightarrow 9=3^2$

$\sqrt[3]{-8}=-2\Leftrightarrow -8=(-2)^3$

Observación: Debemos tener en cuenta que dentro del conjunto de los números reales no se define a la radicación cuando el índice es par y el radicando negativo, como en los ejemplos:

$\sqrt[4]{36}$ existe en $\mathbb{R}$

$\sqrt{-24}$ no existe en $\mathbb{R}$

2. Exponente fraccionario

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$$

Ejemplo:

$$(-8)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{-8}^{\,2}=(-2)^2=4$$

3. $\forall a\in\mathbb{R}\wedge n\in\mathbb{Z}^+$

$$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}a\ ;\ n=\#\ \text{impar}\\ |a|;\ n=\#\ \text{par}\end{cases}$$

*|a|: valor absoluto de "a", significa el valor positivo de "a".

Ejemplo: $\sqrt[3]{x^3}=x;\ \sqrt{x^2}=|x|$

TEOREMAS:

1. Multiplicación: índices iguales

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

Ejemplo: $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{xy}$

2. División: índices iguales

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}};\ b\neq 0$$

Ejemplo: $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$

3. Raíz de raíz

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$$

Álgebra

Ejemplo: $\sqrt[3]{\sqrt{x}} = \sqrt[3\cdot 2]{x} = \sqrt[6]{x}$

PROPIEDADES ADICIONALES

1. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{n}$; $ab \neq 0$

2. $a\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m b}$; $a > 0$

3. $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mk]{a^{nk}}$; $k \in \mathbb{Z}^+$

INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES TRASCENDENTES

Es aquella ecuación donde al menos uno de sus miembros no es una expresión algebraica:

a) Formando parte de algún exponente

Ejemplo: $5^{x+1} = 125$; $2^{3^x} = 16$

b) Como base y exponente a la vez

Ejemplo: $2^x - x = 5$; $x^x = 3$

c) Afectada por algún operador

Ejemplo: $\log x^2 - x = 1$; $\operatorname{Cos}(2x) = 0{,}5$

ECUACIÓN EXPONENCIAL:

Es la ecuación trascendente que presenta a su incógnita formando parte de algún exponente.

Ejemplo: $5^{x^2-1} = 25$

Teorema:

$$\boxed{a^x = a^y \Rightarrow x = y \ ; \ a > 0 \ ; \ a \neq 1}$$

Ejemplo: Resolver: $7^{x-1} = 7^{5-x}$

Igualando los exponentes:

$x - 1 = 5 - x \Rightarrow 2x = 6$

$\therefore x = 3$

Observación: Para resolver algunas ecuaciones trascendentes, a veces es necesario recurrir al proceso de comparación comúnmente llamado método de analogía, el cual consiste en dar forma a una parte de la igualdad tomando como modelo la otra.

Ejemplo: $x^{x^3} = 3$

Transformando al segundo miembro se tendrá:

$$x^{x^3} = \sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}^{3}}$$

$\therefore x = \sqrt[3]{3}$ (representa un valor de "x").

Sin embargo, debemos indicar que el método de analogía sólo nos brinda una solución, pudiendo haber otras, sino veamos el siguiente ejemplo:

En: $\sqrt[x]{x} = \sqrt{2}$ se observa que $x = 2$

Pero $\sqrt{2} = \sqrt[4]{4}$, con lo cual tenemos:

$\sqrt[x]{x} = \sqrt[4]{4}$ de donde: $x = 4$.

Expresiones Finitas e Infinitas

1. $\underbrace{\sqrt[n]{x\sqrt[n]{x\sqrt[n]{x\ldots\sqrt[n]{x}}}}}_{\text{"m" radicales}} = \sqrt[n^m]{x^{\frac{n^m-1}{n-1}}}$

2. $\underbrace{\sqrt[n]{x \div \sqrt[n]{x \div \sqrt[n]{x \div \ldots\sqrt[n]{x}}}}}_{\text{"m" radicales}} = \begin{cases} \sqrt[n^m]{x^{\frac{n^m+1}{n+1}}} \ ; \ \text{"m" impar} \\ \sqrt[n^m]{x^{\frac{n^m-1}{n+1}}} \ ; \ \text{"m" par} \end{cases}$

3. $\sqrt[m]{x^n\sqrt[m]{x^n\sqrt[m]{x^n\ldots\infty}}} = \sqrt[m-1]{x^n}$

4. $\sqrt[m]{x^n \div \sqrt[m]{x^n \div \sqrt[m]{x^n \div \ldots\infty}}} = \sqrt[m+1]{x^n}$

5. $\sqrt{x \pm \sqrt{x \pm \sqrt{x \pm \ldots\infty}}} = \begin{cases} n+1 \Leftrightarrow (+) \\ n \Leftrightarrow (-) \end{cases}$

   Donde: $x = n(n+1)$

Álgebra

NOTACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Se utiliza para indicar las variables de una expresión.

Ejemplos:

* $\underbrace{P(x)}_{\text{"P" de x}} \Rightarrow$ variable: "x"

* $\underbrace{F(x,y)}_{\text{"F" de x,y}} \Rightarrow$ variables: "x e y"

* $\underbrace{Q(x,y,z)}_{\text{"Q" de x,y,z}} = ax + by + cz \begin{cases} \text{variables:} \rightarrow x,y,z \\ \text{constantes:} \rightarrow a,b,c \end{cases}$

VALOR NUMÉRICO (V.N.)

Es el resultado que se obtiene al reemplazar las variables de una expresión algebraica por valores determinados.

Ejemplo:

1.Determinar el V.N. de la siguiente expresión:
$P(x,y,z) = x^2 + 3yz$ para $x = 5;\ y = -2;\ z = 3$

Reemplazando:
$P(5,-2,3) = 5^2 + 3(-2)(3) = 7$

2. Determinar $P(3)$, si: $P(x) = x^3 + 2x - 10$

En este caso, se pide el V.N. de $P(x)$ para: $x = 3$

$P(3) = 3^3 + 2(3) - 10$

$P(3) = 23$

3. Determinar P(5), si:
$P(x+7) = 2x^3 + 5x - 1$

Para este caso, se resuelve la ecuación:
$x + 7 = 5$; de donde: $x = -2$

Al reemplazar:
$P(-2+7) = 2(-2)^3 + 5(-2) - 1$
$P(5) = -16 - 10 - 1$
$P(5) = -27$

Propiedades: Para un polinomio P(x). de la forma:

$$\boxed{P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_0}$$

Se cumple:

1. Suma de coeficientes = P(1).
2. Término independiente = P(0).

Cambio de variable

Así como las variables pueden reemplazarse por números, también pueden ser reemplazadas por otros polinomios, así tenemos:

1. Dado: $P(x) = 2x + 11$. Obtener $P(x+7)$.

Para obtener lo pedido, se reemplaza:
x por $(x+7)$ en P(x).

$$P\underbrace{(x)}_{x+7} = 2\underbrace{x}_{x+7} + 11$$

$P(x+7) = 2(x+7) + 11$
$P(x+7) = 2x + 25$

2.Dado: $P(x+3)=3x+4$

Determinar: $P(2x-5)$.

Se reemplaza $(x+3)$ por $(2x-5)$ previa preparación del polinomio como:

$$P(x+3)=3(x+3-3)+4$$

Entonces:

$$P(2x-5)=3(2x-5-3)+4$$

$$P(2x-5)=6x-20$$

POLINOMIO

Es toda expresión algebraica racional y entera. Cuando tiene un término se denomina monomio, con dos se denomina binomio, con tres trinomio, etc.

Recordemos que en una expresión Algebraica Racional entera:

Ninguna variable está afectada por algún signo radical o exponente fraccionario.

Ninguna variable se encuentra en el denominador.

Ejemplo:

$P(x,y)=3x^2+7y+5$ Polinomio (trinomio)

$P(x,y,z)=2\sqrt{x}+2y-z$ No es polinomio

GRADO:

Es la categoría que se asigna a un polinomio; y depende de los exponentes de sus variables.

GRADOS DE UN MONOMIO:

Grado Absoluto: Es la suma de los exponentes de sus variables.

Grado Relativo: Es el exponente de la variable en referencia.

Ejemplo: $P(x,y)=2a^3x^4y^5$

$G.A.=5+4$

$G.R.(x)=4$

$G.R.(y)=5$

GRADOS DE UN POLINOMIO DE DOS O MÁS TÉRMINOS:

Grado Absoluto: Es el mayor grado absoluto de uno de sus monomios.

Grado Relativo: Es el mayor exponente de la variable en referencia.

Ejemplo:

$$P(x,y)=\underbrace{2x^3y}_{4}+\underbrace{7x^2y^{\overset{\text{Mayor}}{\downarrow}5}}_{9}-\underbrace{6x^{\overset{\text{Mayor}}{\downarrow}6}y^2}_{8}$$

Grados→ 4 9 8

$G.A.=9$

$G.R.(x)=6$

$G.R.(y)=5$

POLINOMIOS IDÉNTICOS

Dos polinomios son idénticos si sus términos semejantes tienen igual coeficiente, así pues:

$P(x)=ax^3+bx+c$

$Q(x)=mx^3+nx+p$

son idénticos, si: a = m; b = n ; c = p.

Propiedad: dos polinomios idénticos tienen el mismo valor numérico para cada sistema de valores asignados a sus variables.

POLINOMIOS ESPECIALES

1. Polinomio Homogéneo: Cuando sus términos son de igual grado absoluto.

Ejemplo:

$$P(x,y)=\underbrace{2x^4y^3}_{7}-\underbrace{x^5y^2}_{7}+\underbrace{5x^6y}_{7}$$

Homogéneo de grado 7.

2. Polinomio Completo: Cuando tiene todos los exponentes de la variable en referencia, desde el mayor hasta el cero incluido.

Ejemplo:

"x" tiene exponente 1   "x" tiene exponente 0

$$P(x,y)=2xy^3+7x^2y^4-5y$$

completo con respecto a "x" .

Propiedad: para un polinomio completo P(x).

$$\boxed{\#\,\text{términos}=\text{Grado}+1}$$

3.Polinomio Ordenado: es aquel cuyos exponentes de la variable en referencia (ordenatriz) van aumentado (orden creciente) o disminuyendo (orden decreciente).

Ejemplo:

Aumenta

$$P(x,y)=4x^4y^3+6x^7y^9+5xy^{20}$$

ordenado ascendentemente respecto a "y".

4. Polinomio Idénticamente Nulo

Es aquel polinomio cuyos términos presentan coeficientes iguales a cero.

Ejemplo:

$$P(x)\equiv ax^3+bx^2+c$$

será idénticamente nulo, si:

$a=0;\ b=0;\ c=0$

Propiedad: todo polinomio idénticamente nulo tiene valor numérico igual a cero para cualquier sistema de valores asignados a sus variables.

5. Polinomio Entero en "x": Aquel polinomio que depende únicamente de la variable "x" y sus coeficientes son números enteros.

Ejemplo:

$P(x)=3x^4-2x^3+6x-8$

6. Polinomios Equivalentes: Se denomina así a aquellos polinomios que teniendo formas distintas, al asignar cantidades iguales a sus variables dan como respuesta igual valor numérico.

Ejemplo:

$$\begin{cases}P(x,y)=(x-y)(x^2+xy+y^2)\\ Q(x,y)=x^3-y^3\end{cases}$$

Asignando valores: $x=4\ ;\ y=2$

$$\begin{cases}P(4,\ 2)=(4-2)(4^2+4\cdot 2+2^2)\\ Q(4,\ 2)=4^3-2^3\end{cases}$$

$$\begin{cases}P(4,\ 2)=56\\ Q(4,\ 2)=56\end{cases}$$

$$P(x,\ y)<>Q(x,\ y)$$

7. Polinomio Mónico: Se denomina así al polinomio entero en "x" y se caracteriza porque su coeficiente principal es igual a la unidad.

Recuerde: Se denomina coeficiente principal al coeficiente del término de mayor grado.

Ejemplo:

$P(x)=x^3-4x+3$

El coeficiente del término de mayor grado (3°) es uno.

Por lo tanto P(x) es un Polinomio Mónico

Capítulo III:

Productos Notables

MULTIPLICACIÓN ALGEBRAICA

Es la operación que tiene como objetivo determinar una expresión algebraica llamada producto, dadas otras expresiones algebraicas llamadas multiplicando y multiplicador, la igualdad obtenida es una identidad.

Ejemplo:

$$\underbrace{(x+2)}_{\text{Multiplicando}}\ \text{y}\ \underbrace{(2x+1)}_{\text{Multiplicador}} \equiv \underbrace{2x^2+5x+2}_{\text{Producto}}$$

PRODUCTOS NOTABLES O IDENTIDADES ALGEBRAICAS

1.Binomio al cuadrado

- $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

Nota: $(a-b)^2=(b-a)^2$ en general: $(a-b)^{2m}=(b-a)^{2m}$; $(m\in\mathbb{Z})$

2.Identidades de Legendre

- $(a+b)^2+(a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$
- $(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab$

3.Diferencia de cuadrados

- $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

4.Binomio al cubo

- $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ó $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$
- $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ ó $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

5.Identidades de Steven

- $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
- $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)+abc$

Álgebra

6.Suma y diferencia de cubos

- $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
- $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

7.Trinomio al cuadrado

- $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

8.Trinomio al cubo

$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2c+3c^2a+3c^2b+6abc$

ó

$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(a+c)(b+c)$

IDENTIDADES ADICIONALES

1.Identidad de Argan'd

$(a^{2n}+a^nb^m+b^{2m})(a^{2n}-a^nb^m+b^{2m})=a^{4n}+a^{2n}b^{2m}+b^{4m}$

Caso particular: $(x^2+x+1)(x^2-x+1)=x^4+x^2+1$

2.Identidades de Lagrange

- $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$
- $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)+(ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2$

3.Identidad de Gauss

- $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=a^3+b^3+c^3-3abc$

de donde:

- $\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]=a^3+b^3+c^3-3abc$

4.Otras identidades:

- $(a+b+c)(ab+ac+bc)=(a+b)(a+c)(b+c)+abc$
- $(a+b)^4-(a-b)^4=8ab(a^2+b^2)$
- $(ab+ac+bc)^2=a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2abc(a+b+c)$

Algunas Relaciones Condicionadas:

I. Si: a + b + c = 0

1. $a^2+b^2+c^2=-2(ab+ac+bc)$
2. $a^3+b^3+c^3=3abc$
3. $a^4+b^4+c^4=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2$
4. $a^5+b^5+c^5=-5abc(ab+ac+bc)$

II. Si: $x,\ y,\ z\in\mathbb{R}$

$x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$

III. Si: $x,\ y,\ z\in\mathbb{R}\wedge m,\ n,\ p\in\mathbb{Z}^+$

$x^{2m}+y^{2m}+z^{2p}=0$

Entonces: $x=0;\ y=0;\ z=0$

Álgebra

Capítulo IV:

División de Polinomios y Cocientes Notables

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

En álgebra, la división de polinomios (también división polinomial o división polinómica) es un algoritmo que permite dividir un polinomio por otro polinomio que no sea nulo. Es la operación que tiene por objetivo determinar un polinomio llamado cociente (q) y otro polinomio denominado resto o residuo (R), conociendo otros dos polinomios llamados dividendo (D) y divisor (d).

El algoritmo es una versión generalizada de la técnica aritmética de división larga. Es fácilmente realizable a mano, porque separa un problema de división complejo, en otros más pequeños.

Esquema clásico:

$$\begin{array}{c|c} D & d \\ \cline{2-2} R & q \end{array}$$

de donde deducimos el algoritmo de la división: $\boxed{D \equiv dq + R}$ (Identidad de la División).

Propiedades:

Siendo el grado del dividendo mayor o igual que el grado del divisor, con respecto a una variable en particular, es decir: $[D]° \geq [d]°$.

Se cumple:

1. El grado del cociente es la diferencia entre el grado del dividendo y divisor.

$$\boxed{[q]° = [D]° - [d]°}$$

2. El máximo grado del resto es igual al grado del divisor disminuido en uno.

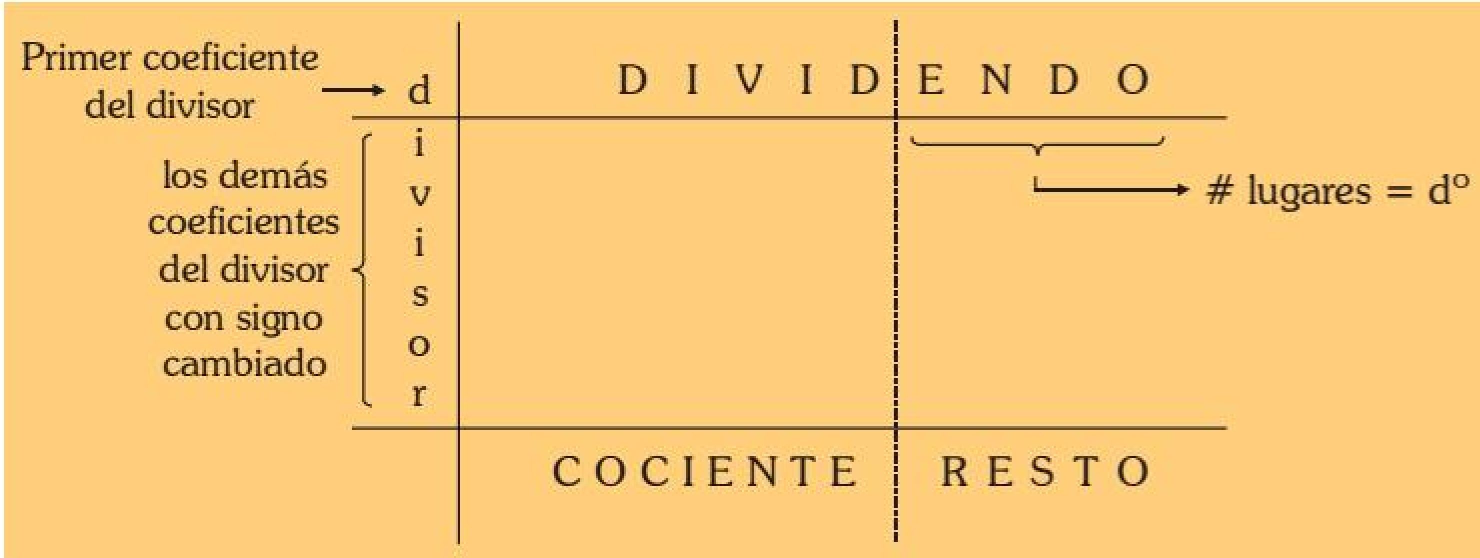
$$\boxed{[R]°_{max} = [d]° - 1}$$

MÉTODOS DE DIVISIÓN

Para todos los métodos, el dividendo y divisor deben estar completos (si falta algún término se debe agregar "cero") y ordenados en forma decreciente.

I.MÉTODO DE HORNER

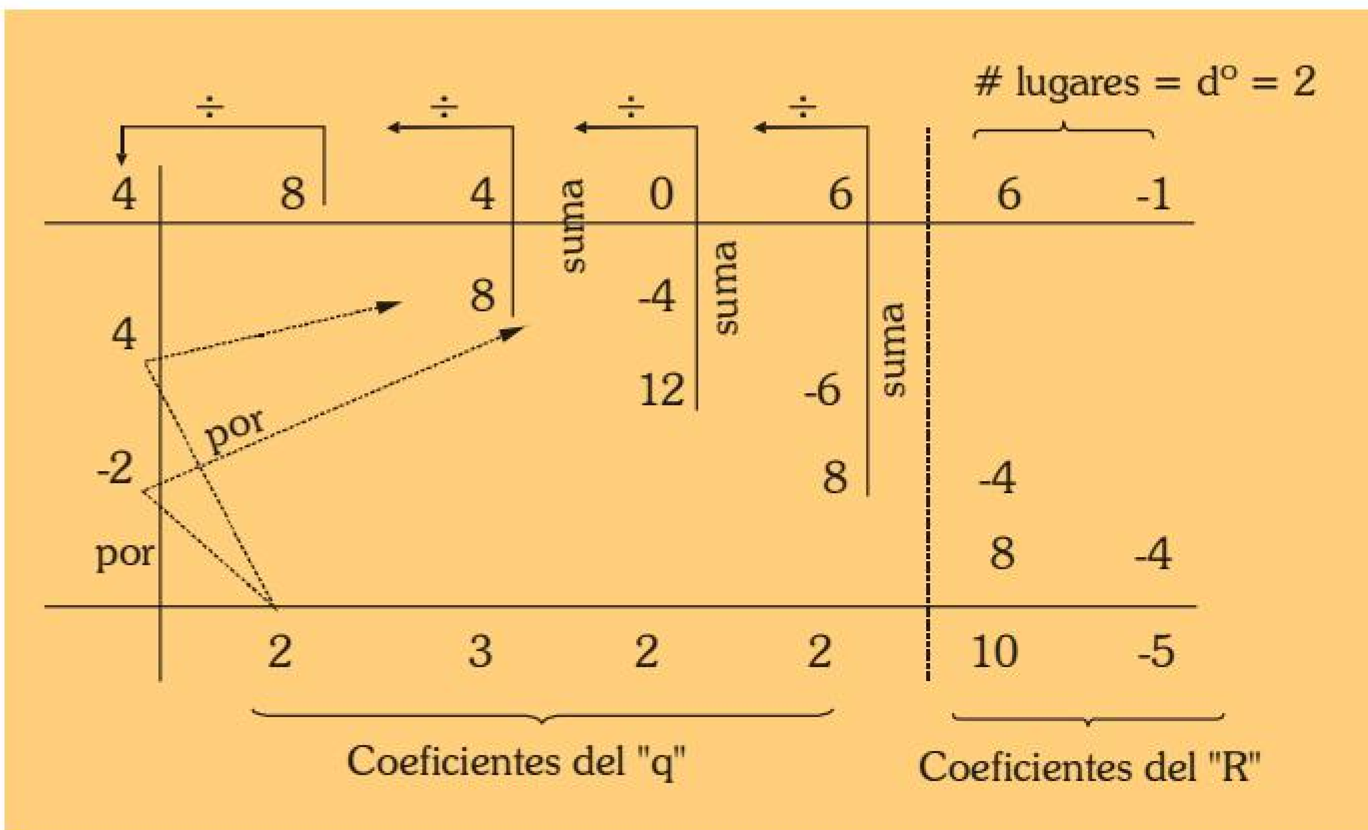
Para este método sólo se utilizan coeficientes, colocándolos en el siguiente esquema:



Ejemplo:

Dividir: $\dfrac{8x^5+4x^4+6x^2+6x-1}{4x^2-4x+2}$

Colocando según el esquema, los coeficientes del dividendo y divisor:



Sólo se obtienen coeficientes. La variable se agrega de acuerdo al grado .

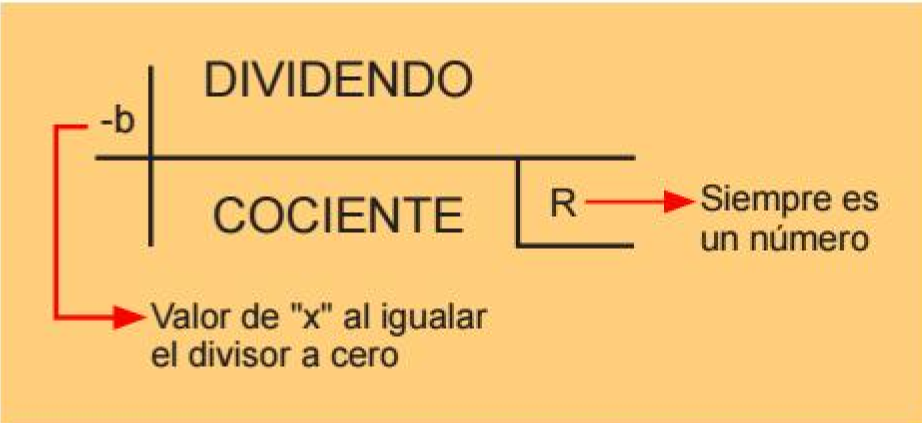
Así tenemos: $q^\circ = 5-2=3$; $R^\circ_{max} = 2-1=1$

$$\Rightarrow \begin{cases} q = 2x^3+3x^2+2x+2 \\ R = 10x-5 \end{cases}$$

II. MÉTODO DE RUFFINI

Al igual que en Horner, sólo utiliza coeficientes. Ruffini se aplica únicamente cuando el divisor es de la forma: $ax+b$.

Esquema de Ruffini:



Ejemplo: $\dfrac{3x^4-8x^3+5x^2+5}{x-2}$

Colocando los coeficientes en el esquema de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr|l} x-2=0 & 3 & -8 & 5 & 0 & 5 \\ 2 & \downarrow & 6 & -4 & 2 & 4 \\ \hline \text{por} & \underbrace{3 \quad -2 \quad 1 \quad 2}_{\text{Coeficientes de "q"}} & & & & \boxed{9} \to R \end{array}$$

Las variables de "q" se agregan de acuerdo al grado: $q^\circ = 4-1=3$.

$$\Rightarrow \begin{cases} q = 3x^3-2x^2+2x+2 \\ R = 9 \end{cases}$$

Observación:

Si el divisor es $ax+b$ $(a \neq 1)$, luego de realizar la división, los coeficientes del cociente se dividen entre "a".

Ejemplo: $\dfrac{3x^3-2x^2+2x+2}{3x-2}$

$$\begin{array}{r|rrrr|r} 3x-2=0 & 3 & 7 & -3 & 1 & 7 \\ \frac{2}{3} & \downarrow & 2 & 6 & 2 & 2 \\ \hline & 3 & 9 & 3 & 3 & 9 \\ \div 3 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ & 1 & 3 & 1 & 1 & \end{array}$$

$$q^\circ = 4-1=3 \Rightarrow \begin{cases} q = x^3+3x^2+x+1 \\ R = 9 \end{cases}$$

TEOREMA DEL RESTO

El resto de dividir el polinomio P(x) entre $(x-a)$ es P(a).

Observación:

Si el divisor no es de primer grado, se calcula alguna expresión según el caso y tal cual, se reemplaza en el dividendo.

Ejemplo:
Hallar el resto:

$$\frac{x^{50}+3x^{21}-7x+2}{x+1}$$

Por el Teorema del Resto: $x+1=0 \to x=-1$

Reemplazando en el "D":

$$R = (-1)^{50}+3(-1)^{21}-7(-1)+2$$
$$R = 1-3+7+2$$
$$\boxed{R=7}$$

Ejemplo:
Hallar el resto:

$$\frac{x^{20}+7x^5-6x^4+x^3+1}{x^2-1}$$

Por el Teorema del Resto: $x^2-1=0 \to x^2=1$ (no se calcula "x").

Formando "x^2" en el dividendo:

$$D = (x^2)^{10}+7(x^2)^2x-6(x^2)^2+x^2\cdot x+1$$

Reemplazando:

$$x^2=1 \Rightarrow R = (1)^{10}+7(1)^2x-6(1)^2+1\cdot x+1$$
$$R = 1+7x-6+x+1$$
$$\boxed{R=8x-4}$$

DIVISIBILIDAD ALGEBRAICA

Se dice que un polinomio es divisible entre otro, si el resto de dividirlos es cero; es decir:

Álgebra

Si en: $P(x) \div f(x) \to R = 0$
Entonces $P(x)$ es divisible entre $f(x)$.

Propiedades:

1. Si un polinomio es divisible entre otros polinomios por separado, entonces será divisible entre el producto de dichos polinomios, siempre que estos sean primos entre sí, (no deben tener ningún factor en común); es decir:

Si en: $P(x) \div f(x) \to R = 0$
$P(x) \div g(x) \to R = 0$
$\Rightarrow P(x) \div f(x) \cdot g(x) \to R = 0$
$\to R = 0$
* $f(x)$ y $g(x)$ son primos entre sí.

2. Si un polinomio es divisible entre un producto de varios polinomios, entonces será divisible entre cada uno por separado; es decir:

Si en:
$P(x) \div f(x) \cdot g(x) \to R = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(x) \div f(x) \to R = 0 \\ P(x) \div g(x) \to R = 0 \end{cases}$$

COCIENTES NOTABLES (C.N.)

Se llama, así, a los cocientes exactos obtenidos de la división de binomios de la forma:

$$\boxed{\frac{x^n \pm a^n}{x \pm a}}$$

Condiciones:

$$\begin{cases} R = 0 \\ n \to \text{ entero y positivo} \end{cases}$$

Propiedades:

1. En: $\dfrac{x^n \pm a^n}{x \pm a}$, el número de términos del cociente será "n".
2. Si: $\dfrac{x^m \pm a^n}{x^p \pm a^q}$, es un C.N. entonces se cumple que:

FÓRMULAS DE LOS COCIENTES NOTABLES

1er. Caso: $n \to$ par o impar

$$\boxed{\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots + a^{n-1}}$$

2do. Caso: $n \to$ impar

$$\boxed{\frac{x^n + a^n}{x + a} = x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - \ldots - a^{n-1}}$$

3er. Caso: $n \to$ par

$$\boxed{\frac{x^n - a^n}{x + a} = x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - \ldots - a^{n-1}}$$

Observación:

La forma $\dfrac{x^n + a^n}{x - a}$ no genera un C.N. pues $R \neq 0$.

TÉRMINO GENERAL (T_k)

Se llama así a un término cualquiera del C.N. se representa por T_k. La fórmula para obtener el término general en: $\dfrac{x^n - a^n}{x - a}$ es:

$$\boxed{T_k = x^{n-k}a^{k-1}}$$

Donde: "k" lugar de término.
x, a: términos del divisor (denominador).
n: exponentes repetidos en el dividendo.

Observación: La misma fórmula puede aplicarse para los casos:

$\dfrac{x^n + a^n}{x + a}$ y $\dfrac{x^n - a^n}{x + a}$ pero con el factor $(-1)^{k-1}$

Así tendremos:

$$\boxed{T_k = (-1)^{k-1} x^{n-k}a^{k-1}}$$

Capítulo V:

Factorización de Polinomios

¿QUÉ ES FACTORIZAR?

Factorizar un polinomio es descomponerlo en dos o más polinomios llamados factores, de tal modo que, al multiplicarlos, se obtenga el polinomio original.

Ejemplo:

$$\underbrace{x^2-y^2}_{\text{Sin factorizar}} = \overbrace{\underbrace{(x+y)(x-y)}_{\text{Factores}}}^{\text{Ya factorizado}}$$

Puede notarse que si multiplicamos $(x+y)(x-y)$ se obtiene x^2-y^2 que viene a ser el polinomio original (la factorización y la multiplicación son procesos inversos).

Factor Primo

Es aquel polinomio que no se puede descomponer en otros polinomios.

Ejemplo:

$x^2-y^2 \rightarrow$ no es primo (se puede descomponer).

$x^2+y^2 \rightarrow$ es primo (no se puede descomponer).

Propiedades:

1. El número máximo de factores primos que tiene un polinomio está dado por su grado. Así por ejemplo:
   $x^3-6x^2+12x-6$ a los más tiene 3 factores primos.

2. Los polinomios lineales (primer grado) necesariamente son primos.
3. Sólo se pueden factorizar los polinomios no primos.

MÉTODOS DE FACTORIZACIÓN

I.Método del Factor Común

Se aplica cuando en todos los términos del polinomio se repite el mismo factor, el que se denomina factor común. Para factorizar, se extrae a cada término del polimonio el factor común, (si éste tuviese diferentes exponentes, se elige el de menor exponente).

Ejemplo:

1. Factorizar: $xy+xz+xw$.

Solución:

$$\underbrace{xy+xz+xw}_{\text{"x" factor común}} \xrightarrow{\text{se extrae "x"}} \underbrace{x(y+z+x)}_{\text{Polinomio factorizado}}$$

2. Factorizar: $xy^4+y^7z+y^3w$

Solución:

Se extrae y^3; variable con menor exponente

$$\underbrace{xy^4+y^7z+y^3w}_{y^3 \text{ menor exponente}} = \underbrace{y^3(xy+y^4z+w)}_{\text{Polinomio factorizado}}$$

3. Factorizar: $a^2+ab+ac+bc$

Solución:

Agrupando términos:

$=\underline{a^2}+\underline{ab}+\underline{\underline{ac}}+\underline{\underline{bc}}$

$=a(a+b)+c(a+b)$

Observe que ahora aparece un nuevo factor común:

$=(a+b)(a+c)$; polinomio factorizado

Álgebra

II. Método de las Identidades

En este caso, se utilizan las identidades algebraicas (Productos Notables); pero en forma inversa, es decir teniendo el producto se calculan los factores que le dieron origen.

Se puede utilizar cualquier Producto Notable estudiado; pero los que se utilizan con más frecuencia los recordamos en el siguiente cuadro:

Prod. Notable	Polinomio Factorizado
a^2-b^2	$(a+b)(a-b)$
$(a+b)^2$	$a^2+2ab+b^2$
$(a-b)^2$	$a^2-2ab+b^2$
a^3+b^3	$(a+b)(a^2-ab+b^2)$
a^3-b^3	$(a-b)(a^2+ab+b^2)$
En general: a^n-b^n	$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b+...+b^{n-1})$
Para "n" impar: a^n+b^n	$(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b-...-b^{n-1})$

Ejemplo:

1. Factorizar: x^4-y^2

Solución:

$$(x^2)^2-y^2 \rightarrow \underbrace{(x^2+y)(x^2-y)}_{\text{Polinomio factorizado}}$$

2. Factorizar: $x^2+10x+25$

Solución:
Dando forma de TCP a la expresión:

$$x^2+2(x)(5)+5^2 \rightarrow \underbrace{(x+5)^2}_{\text{Polinomio Factorizado}}$$

3. Factorizar: a^3+27

Solución:

$$a^3+3^3 \rightarrow \underbrace{(a+3)(a^2-3a+9)}_{\text{Polinomio factorizado}}$$

III. Método de las Aspas

a) Aspa Simple:

Se aplica para factorizar trinomios, obteniéndose 2 factores binomios.

Regla: Se descomponen dos de los términos, en dos factores, luego se calcula la suma del producto en aspa, tal que sea igual al término no descompuesto del trinomio.

Ejemplo:
Factorizar: $x^2+10x+9$

Solución:

$$x^2+7x+12 \longrightarrow (x+3)(x+4)$$

$$\begin{array}{lll} x & 3 & \rightarrow 3x \\ x & 4 & \rightarrow \underline{4x} \\ & & \quad 7x \end{array}$$

b) Aspa Doble:

Se aplica a polinomios de la forma:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F$$

se obtienen dos factores trinomios.

Regla:

1. Se descomponen en dos factores:
$$Ax^2;\ Cy^2;\ F$$
2. Mediante tres aspas, se comprueban:
$$Bxy;\ Dx;\ Ey$$

Ejemplo:
Factorizar: $10x^2+xy-3y^2-16x-14y-8$

Álgebra

Solución:

$$10x^2 + xy - 3y^2 - 16x - 14y - 8$$

$$\begin{array}{ccc} 5x & 3y & 2 \\ 2x & -y & -4 \end{array}$$

Comprobaciones:

Aspa 1: $-5xy + 6xy = xy$

Aspa 2: $-12y - 2y = -14xy$

Aspa 3: $4x - 20x = -16x$

luego, tendremos: $(5x + 3y + 2)(2x - y - 4)$

c) Aspa Doble Especial

Generalmente, se aplica a polinomios de cuarto grado de la forma:

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

Se obtienen dos factores trinomios de 2° grado.

Regla:

1. Se descomponen: Ax^4 y E, luego se calcula la suma del producto en aspa.
2. La suma obtenida se resta de Cx^2.
3. La diferencia que resulta se descompone en dos factores para comprobarlos con: Bx^3 y Dx.

Ejemplo:

Factorizar: $x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 14x + 6$

Solución:

Encontremos el término cuadrático

$$\begin{array}{ll|l} x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 14x + 6 & & 3x^2 \\ x^2 & 2 & \underline{2x^2} \\ x^2 & 3 & 5x^2 \end{array}$$

Ahora la diferencia: $9x^2 - 5x^2 = 4x^2$

$$x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 14x + 6$$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & 4x & 2 \\ x^2 & x & 3 \end{array}$$

Comprobaciones:

Aspa 1: $3x^2 + 2x^2 = 5x^2$

Aspa 2: $4x^3 + x^3 = 5x^3$

Aspa 3: $12x + 2x = 14x$

Observe que $5x^2$ es el resultado de restar $9x^2$ y $4x^2$.

IV. Método de los Divisores Binomios o Evaluación Binómica

Se aplica a polinomios de cualquier grado, generalmente con una sola variable, siempre que tengan por lo menos un factor lineal (primer grado).

"Ceros" de un Polinomio

Son todos los valores de la variable que anulan el polinomio.

Para obtener los posibles "ceros" de un polinomio, tendremos los siguientes casos:

Caso A: Si el coeficiente principal es 1, los posibles ceros pueden ser:

$$\boxed{\text{Divisores del término independiente}}$$

Caso B: Si el coeficiente principal es diferente de 1, los posibles ceros están dados por:

$$\boxed{\dfrac{\text{Divisores del término independiente}}{\text{Divisores del coeficiente principal}}}$$

Regla para factorizar:

- Se calcula los posibles ceros y se comprueba si alguno anula al polinomio.

Ejemplo:

En el siguiente polinomio:

$$5x^3 + x^2 - 34x + 24$$

$x = 2 \Rightarrow (x - 2)$ es factor

$x = 3 \Rightarrow (x - 3)$ es factor

$x = \dfrac{4}{5} \Rightarrow (5x - 4)$ es factor

Álgebra

- Al polinomio dado, se le divide entre el factor o factores binomios obtenidos en el primer paso, el cociente de esta división es el otro factor del polinomio.

Ejemplos:

1. Factorizar: $x^3-6x^2+12x-7$

Solución:

* Posibles ceros $\rightarrow$ Coeficiente principal $=1$

$$\underbrace{\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6}_{\text{Divisores de 6}}$$

* Se comprueba que se anula para: $x=1$
$(x=1)$ es factor.

* Se divide por Ruffini al polinomio entre $(x=1)$:

$$\begin{array}{r|rrr|r} x-1=0 & 1 & -6 & 12 & -7 \\ 1 & \downarrow & 1 & -5 & 7 \\ \hline & 1 & -5 & 7 & \boxed{0} \end{array}$$

x^2-5x+7 factor faltante

* Finalmente tenemos:
$(x-1)(x^2-5x+7)$

2. Factorizar: $6x^3+7x^2-6x+1$

* Posibles ceros (coeficiente principal $\neq$ de 1):

$$\underbrace{\pm 1,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{1}{6}}_{\left(\frac{\text{Divisores de "1"}}{\text{Divisores de "6"}}\right)}$$

* Se comprueba que se anula para: 1/3.
* Se divide por Ruffini entre: $3x-1$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 7 & -6 & 1 \\ 1/3 & \downarrow & 2 & 3 & -1 \\ \hline \div 3 & 6 & 9 & -3 & 0 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ & 2 & 3 & -1 & \end{array}$$

El polinomio cociente es: $2x^2+3x-1$

Finalmente tenemos: $(3x-1)(2x^2+3x-1)$.

V. Método de los Artificios

Se utiliza en una gran variedad de ejercicios sobre factorizacion, por lo tanto es deducible que no existan reglas fijas. Pero si es importante la destreza del operador; pese a ello pero se puede recomendar las siguientes técnicas:

- Si dos o más términos se repiten constantemente, se sugiere hacer cambio de variable.

Ejemplo:
Factorizar:

$$(a+b+c-2)^2+(a+b+c-1)^2-5(a+b+c+1)^2$$

Solución:
Cambio de variable:
$a+b+c=x$
Porque es el término que más se repite

Reemplazando:

$(x-2)^2+(x-1)^2-5(x+1)$

$x^2-4x+\cancel{4}+x^2-2x+\cancel{1}-5x-\cancel{5}$

$2x^2-11x$

$x(2x-11)$

Restituyendo el valor a la variable, tenemos:
$(a+b+c)[2(a+b+c)-11]$

- Si aparecen exponentes pares, trataremos de formar un TCP.

Ejemplo:

Factorizar: $x^4+4b^4c^8$

Solución:

Observe que tenemos: $(x^2)^2+(2b^2c^4)^2$, que son los extremos cuadráticos de un TCP.

Ahora formemos el TCP, para lo cual necesitamos el término central:

$$2(x^2)(2b^2c^4)\rightarrow 4x^2b^2c^4$$

Artificio: Sumando y restando:

$$\underbrace{x^4+4x^2b^2c^4+4b^4c^8}_{\text{TCP}}-4x^2b^2c^4$$

$$(x^2+2b^2c^4)^2-(2xbc^2)^2$$

Factorizando como diferencia de cuadrados:

$$(x^2+2b^2c^4+2xbc^2)(x^2+2b^2c^4-2xbc^2)$$

- Si aparecen exponentes impares, procuramos formar suma o diferencia de cubos.

Ejemplo:

Factorizar: x^5+x+1

Solución:

* Como hay exponentes impares, buscamos suma o diferencia de cubos.
* Si a "x^5" le factorizan "x^2", aparece "x^3".

Artificio: Sumamos y restamos "x^2".

$$x^5+x+1+x^2-x^2$$

$$x^2(x^3-1)+(x^2+x+1)$$

$$x^2(x-1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1)$$

$$(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$$

V. Factorización del Polinomio Recíproco

Polinomio Recíproco

Es aquel cuyos coeficientes equidistantes de los extremos son iguales:

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Bx+A$$

Es un polinomio recíproco de 4to. grado

A continuación exponemos su método de factorización:

Ejemplo:

Factorizar: $P(x)=6x^4+5x^3+6x^2+5x+6$

Solución:

Factorizamos "x^2"

$$P(x)=x^2\left(6x^2+5x+6+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)$$

$$P(x)=x^2\left[6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6\right]$$

Hagamos un cambio de variable:

$x+\frac{1}{x}=y$; entonces:

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$$

Sustituyendo obtenemos:

$$P(x)=x^2(6y^2+5y+6)$$

Ahora por aspa simple:

$$P(x)=x^2(6y^2+5y+6)$$

$$\begin{array}{cc} 3y & -2 \\ 2y & +3 \end{array}$$

$$P(x)=x^2(3y-2)(2y+3)$$

Restituyendo la variable:

$$P(x)=x^2\left[3\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\right]\left[2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3\right]$$

$$P(x)=x^2\left[\frac{3x^2+3-2x}{x}\right]\left[\frac{2x^2+2+3x}{x}\right]$$

$$P(x)=(3x^2-2x+3)(2x^2+3x+2)$$

Importante:

Los polinomios recíprocos de grado impar siempre son divisibles por $(x+1)$ ó $(x-1)$, esto implica que al hacer una factorización de este tipo de polinomio (de grado impar), previamente es necesario extraer el factor binomial $(x+1)$ ó $(x-1)$ mediante el uso del método de Ruffini y luego aplicar la técnica anteriormente expuesta.

Capítulo VI:

MCD y MCM de Polinomios Fracciones Algebraicas

MCD Y MCM DE POLINOMIOS

Regla para calcular el MCM y MCD de Polinomios:

1. Se factorizan los polinomios dados.
2. El MCD estará formado por la multiplicación de todos los factores primos comunes de los polinomios dados, considerados con su menor exponente.
3. El MCM está formado por la multiplicación de factores primos no comunes y comunes, a los polinomios dados, considerados con su mayor exponente.

Ejemplo:

Hallar el MCD y MCM de los polinomios:

$P(x)=x^3+x^2-x-1 \quad \wedge \quad Q(x)=x^3-x^2-2x$

Factorizando:

$P(x)=(x+1)^2(x-1)$

$Q(x)=x(x-2)(x+1)$

$$\begin{cases} \text{MCD }[P(x);\ Q(x)]=(x-1) \\ \text{MCM }[P(x);\ Q(x)]=(x+1)^2(x-1)(x-2) \end{cases}$$

Propiedad:

Dados los polinomios A y B.

$$\boxed{\text{MCD}(A;\ B)\cdot\text{MCM}(A;\ B)=AB}$$

FRACCIÓN ALGEBRAICA

Es toda expresión de la forma $\frac{A}{B}$ donde por lo menos "B" debe ser literal. Esto significa que el denominador debe ser necesariamente una cantidad variable.

Ejemplo:

*Son fracciones algebraicas

$\frac{x+1}{x-1};\ \frac{3x}{xy};\ \frac{x^3+1}{x^2}$

pero:

$\frac{x}{7};\ \frac{2}{5}$ no son fracciones algebraicas

Simplificación de Fracción Algebraica

Para poder simplificar, debemos factorizar el numerador y denominador para luego simplificar los factores que presenten en común.

Ejemplo:

Simplificar: $\frac{x^2-9}{x^2-2x-15}$

Solución:

$$\frac{x^2-9}{x^2-2x-15}=\frac{(x+3)(x-3)}{(x-5)(x+3)}=\frac{x-3}{x-5}$$

Operaciones con Fracciones

I. Adición y/o Sustracción:

En este caso, es necesario dar común denominador (MCM de los denominadores), salvo que las fracciones sean homogéneas (denominadores iguales). Así tenemos:

A. Fracciones Homogéneas:

Ejemplos:

$$\frac{m}{x}+\frac{n}{x}+\frac{p}{x}=\frac{m+n+p}{x}$$

$$\frac{ax}{x+y}+\frac{by}{x+y}-\frac{cx}{x+y}=\frac{ax+by-cx}{x+y}$$

B. Fracciones Heterogéneas:

Ejemplos:

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{y}+\frac{C}{z}=\frac{Ayz+Bxz+Cxy}{xyz}$$

$$F=\frac{P}{x+a}+\frac{Q}{y+b}+\frac{R}{z+c}$$

$$F=\frac{P(y+b)(z+c)+Q(x+a)(z+c)+R(x+a)(y+b)}{(x+a)(y+b)(z+c)}$$

C.Regla Práctica (para 2 fracciones):

Dadas 2 fracciones heterogéneas, se multiplican en aspa y se pone como denominador el producto de los denominadores.

$$\frac{A}{B}\pm\frac{C}{D}=\frac{AD\pm BC}{BD}$$

II. Multiplicación:

Para el caso de la multiplicación de fracciones, se multiplica numeradores entre sí, de igual manera los denominadores.

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}$$

III. División de Fracciones:

Para el caso de la división de fracciones, se invierte la segunda fracción (fracción dividendo) y luego se ejecuta como una multiplicación.

$$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$$

ó también:

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}=\frac{AD}{BC}$$

Importante:
Es necesario simplificar numerador y denominador de las fracciones, antes y después de realizar las operaciones.

Transformación de Fracciones en Fracciones Parciales

Este es un proceso inverso a la adición o sustracción de fracciones. Es decir una fracción se transforma en la adición o sustracción de fracciones que le dieron origen, veamos:

Caso 1: Cuando el denominador es un producto de factores lineales

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{a_1x_1+b_1}+\frac{A_2}{a_2x_2+b_2}+\ldots+\frac{A_n}{a_nx_n+b_n}$$

Ejemplo: $\dfrac{7x+3}{x^2+3x-4}$

Caso 2: Cuando el denominador es un producto de factores lineales, algunos de los cuales se repiten

$$\frac{A_1}{a_1x_1+b_1}+\frac{A_2}{(a_1x_1+b_1)^2}+\ldots+\frac{A_n}{(a_1x_1+b_1)^k}$$

Ejemplo: $\dfrac{5x^2-36x+48}{x(x-4)^2}$

Caso 3: Cuando el denominador contiene factores cuadráticos irreductibles primos

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

Ejemplo: $\dfrac{4x^2-8x+1}{x^3-x+6}$

Caso 4: Cuando el denominador contiene un factor irreductible repetido

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots+\frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^2}$$

Ejemplo: $\dfrac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}$

Importante:
En caso de tratarse de fracciones impropias, es necesario hacer previamente la división y transformar a fracciones parciales el residuo.

Capítulo VII: Teorema del Binomio

EL BINOMIO DE NEWTON

Es un algoritmo que permite calcular una potencia cualquiera de un binomio, para ello se emplean los coeficientes binomiales, que no son más que una sucesión de números combinatorios.

Trata del desarrollo o expansión de: $(x+a)^n$ para "n" entero y positivo. Previamente estudiaremos algunos conceptos básicos necesarios para este capítulo.

Factorial

El factorial de un número "n" (entero y positivo), es el producto de multiplicar todos los números consecutivos desde la unidad hasta el número "n".

Notación de Factorial

$n!$: Factorial de "n"
$\underline{|n}$: Factorial de "n"

Por definición:

$$\boxed{n! = 1\times 2\times 3 \ldots \times n;\ (n \geq 2)}$$

Ejemplo:

$3! = 1\times 2\times 3 = 6$

$6! = 1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6 = 720$

Definiciones:

Factorial de cero: $\boxed{0! = 1}$

Factorial de la unidad: $\boxed{1! = 1}$

Propiedad:

$$\boxed{n! = n(n-1)!}$$

Ejemplo:

$80! = 80\times 79!$

$80! = 80\times 79\times 78!$

$\vdots$

$80! = 80\times 79\times 78\times \ldots \times 2\times 1$

Igualdad de Factorial:

I. Si: $a! = 1 \Rightarrow a = 0$ ó $a = 1$

II. Si: $a! = b! \Rightarrow a = b\ \ (a,\ b \neq 0,\ 1)$

Semifactorial

Se representa por: N!! y su definición depende, si "N" es par o impar.

$N = 2n(\text{par}) \Rightarrow (2n)!! = 2\times 4\times 6\times \ldots \times 2n$

$$\boxed{(2n)!! = 2^n n!}$$

$N = 2n-1(\text{impar}) \Rightarrow (2n-1)!! = 1\times 3\times 5\times \ldots \times (2n-1)$

$$\boxed{(2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n n!}}$$

Observación:

$n!! \rightarrow$ Semifactorial de "n"

$(n!)! \rightarrow$ Factorial de factorial de "n"

Ejemplo:

$(3!)! = 6! = 72$

$3!! = 1\times 3 = 6$

ANÁLISIS COMBINATORIO

PERMUTACIONES

Permutar "n" elementos es formar grupos de "n" elementos cada uno, tal que un grupo se diferencia del otro por el orden:

Ejemplo: Pemutar: a, b, c (3 elementos)

Formando grupos:

$$\left.\begin{matrix} a & b & c & a & c & b \\ b & a & c & b & c & a \\ c & a & b & c & b & a \end{matrix}\right\} \# \text{ de permutas} = 6$$

Número de Permutaciones

Se representa por: P_n y se obtiene por la siguiente fórmula:

$$\boxed{P_n = n!}$$

Ejemplo: $P_4 = 4! = 24$

VARIACIONES

Formar variaciones con "n" elementos tomados de "k" en "k". Es formar grupos de "k" elementos cada uno, de tal manera que un grupo se diferencia del otro en el orden, o en algún elemento.

Ejemplo: Formar variaciones con: a, b, c, de 2 en 2.

Tendremos:

$$\left.\begin{matrix} ab & ac & bc \\ ba & ca & cb \end{matrix}\right\} \# \text{ de variaciones} = 6$$

El número de Variaciones se representa por V_k^n: Fórmula:

$$\boxed{V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Ejemplo: $V_2^3 = \dfrac{3!}{(3-2)!} = 6$

COMBINACIONES

Formar combinaciones con "n" elementos tomados de "k" en "k". Es formar grupos de "k" elementos cada uno, tal que un grupo se diferencia del otro por lo menos en un elemento.

Ejemplo:
Formar combinaciones con: a, b, c, d, de 2 en 2.

Tendremos:

$$\left.\begin{matrix} ab & ac & ad \\ bc & bd & cd \end{matrix}\right\} \# \text{ de combinaciones} = 6$$

NÚMERO COMBINATORIO

El número de combinaciones formadas se denominan número combinatorio, se representa por C_k^n. Fórmula:

$$\boxed{C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!}}$$

Ejemplo: $C_2^4 = \dfrac{4!}{(4-2)!2!} = \dfrac{24}{2\times 2} = 6$

Propiedades del Número Combinatorio

1. Combinatorios iguales a la unidad

$C_0^n = 1$	$C_n^n = 1$	$C_1^n = 1$

2.Combinatorios Complementarios

$$\boxed{C_k^n = C_{n-k}^n}$$

3.Suma de Combinatorios

$$\boxed{C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}}$$

4.Degradación de Combinatorios

$$\boxed{C_k^n = \frac{n}{k} C_{k-1}^{n-1}}$$

$$\boxed{C_k^n = \frac{n-k+1}{k} C_{k-1}^n}$$

$$\boxed{C_k^n = \frac{n}{n-k} C_k^{n-1}}$$

Álgebra

FÓRMULA DEL TEOREMA DEL BINOMIO

Esta fórmula atribuida a Newton nos permite obtener el desarrollo de $(x+a)^n$, siendo "n" entero y positivo. (El aporte de Newton fue el desarrollo cuando "n" es negativo y/o fraccionario).

$$(x+a)^n = C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1}a + C_2^n x^{n-2}a^2 + \ldots + C_n^n a^n$$

Ejemplo:

$$(x+a)^4 = C_0^4 x^4 + C_1^4 x^3 a + C_2^4 x^2 a^2 + C_3^4 x a^3 + C_4^4 a^4$$

$$(x+a)^4 = x^4 + 4x^3 a + 6x^2 a^2 + 4xa^3 + a^4$$

$$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$$

Observaciones del desarrollo de $(x+a)^n$

1. El número de términos del desarrollo, es el exponente del binomio aumentado en uno.

$$\#\ \text{términos} = n+1$$

2. Si el binomio es homogéneo, el desarrollo será homogéneo del mismo grado.
3. Si los coeficientes del binomio son iguales, los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos, son iguales.
4. Recordando que la suma de coeficientes se obtiene para $x=a=1$, tendremos:

$$C_0^n + C_1^n + C_2^n + \ldots + C_n^n = 2^n$$

FÓRMULA DEL TÉRMINO GENERAL

Se utiliza para obtener un término cualquiera del desarrollo en función del lugar que ocupa.
Se representa por: T_{k+1}

Fórmula: En $(x+a)^n$

$$T_{k+1} = C_k^n x^{n-k} a^k$$

Donde:
n: exponente; $k+1$: Lugar del término

Ejemplo:
Halle el término que ocupa el lugar 40 en el desarrollo de: $\left(x^2 - y^3\right)^{60}$

Solución:

$$T_{39+1} = C_{39}^{60}\left(x^2\right)^{60-39}\left(-y^3\right)^{39}$$

$$T_{40} = -C_{39}^{60} x^{42} y^{117}$$

OTRAS DEFINICIONES Y FÓRMULAS

I. Coeficiente Binómico: Otra manera de representar los coeficientes binómicos es mediante la expresión equivalente:

$$\binom{n}{k} = C_k^n$$

Donde: $n \in \mathbb{R}$; $k \in \mathbb{Z}$

Siendo su desarrollo:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{k!}$$

II. Fórmula para:

$$(1+x)^n \rightarrow \begin{cases} n: \text{ negativo y/o fraccionario} \\ -1 < x < 1;\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots$$

III. Número de términos de:

$\left(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k\right)^n$; n: entero y positivo

$$\#\ \text{términos} = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$$

$$\text{Coeficiente de} = a_1^{\alpha} a_2^{\beta} a_3^{\gamma} \ldots a_k^{\phi} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots\phi!}$$

RADICACIÓN

Es la operación que tiene como objetivo calcular una expresión llamada raíz, tal que elevada al índice resulte otra expresión llamada radicando o cantidad subradical.

Veamos:

Si: $\sqrt[n]{A} = b \Rightarrow \boxed{b^n = A}$

En donde:

$$\begin{cases} \sqrt[n]{A} \to \text{radical} \\ \sqrt[n]{A} \to \text{radicando o cantidad subradical} \\ b \to \text{raíz} \\ n \to \text{radical} \\ \sqrt{\ } \to \text{signo radical} \end{cases}$$

Valor Aritmético de un radical

Es aquel valor real, positivo y único, que elevado al índice, reproduce al radicando.

Observación:

Cuando se tiene $\sqrt[n]{A}$ implícitamente nos están pidiendo el valor aritmético.

Debemos tener en cuenta la definición:

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$$

Radicales Homogéneos

Son aquellos que tienen índices iguales. Es importante tener en cuenta que las operaciones de multiplicación y división, sólo se pueden efectuar entre radicales homogéneos.

Ejemplo:

* Son radicales homogéneos

$$\sqrt[3]{xy};\ \sqrt[3]{a};\ \sqrt[3]{zw^2}$$

* Multiplicación

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc}$$

* División

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Radicales Semejantes

Son aquellos que tienen índices y radicandos iguales. Estos radicales son los únicos en los que se puede efectuar la adición o sustracción.

Ejemplos:

* $5\sqrt[4]{xy};\ \frac{1}{2}\sqrt[4]{xy};\ a\sqrt[4]{xy}$ radicales semejantes.

Adición: $3\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

Sustracción: $11\sqrt[3]{4} - 8\sqrt[3]{4} = 3\sqrt[3]{4}$

Transformación de radicales dobles en simples

I.Radicales de la forma: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$

Primer Método:

Donde:

$$\boxed{\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}}$$

$C = \sqrt{A^2 - B}$ debe ser racional, debe tener raíz cuadrada exacta.

Ejemplo: Descomponer: $\sqrt{5+\sqrt{24}}$ en radicales simples.

Solución:
Calculemos "C" ; donde: $A=5$; $B=24$.

$$C=\sqrt{5^2-24}=1$$

$$\sqrt{5+\sqrt{24}}=\sqrt{\frac{5+1}{2}}+\sqrt{\frac{5-1}{2}}$$
$$=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

Segundo Método
Se forma trinomio cuadrado perfecto, recordemos que:

$$\left(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\right)^2=a+b\pm 2\sqrt{ab}$$

Veamos:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{a+b\pm 2\sqrt{ab}}=\sqrt{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{a+b\pm 2\sqrt{ab}}=\sqrt{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

1 2

Ejemplo:
Descomponer: $\sqrt{8-\sqrt{60}}$ en radicales simples.

$$\sqrt{8-\sqrt{60}}=\sqrt{5+3-2\sqrt{5\cdot 3}}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$$

1 2

II. Radicales de la forma: $\sqrt[3]{A\pm\sqrt{B}}$

$$\sqrt[3]{A\pm\sqrt{B}}=x\pm\sqrt{y};\ \left(x\in\mathbb{Q};\ y\in\mathbb{Q}^+\right)$$

Los valores de "x" e "y" y se obtienen resolviendo las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases}4x^3=A+3Cx & \text{... (1)}\\ x^2-y=C & \text{... (2)}\end{cases}$$

Donde:

$$C=\sqrt[3]{A^2-B}\rightarrow \text{ racional } \left(\sqrt[3]{\ }\ \text{exacta}\right)$$

Sugerencia: como "x" es racional entero, es recomendable "tantear" con valores enteros de "x", en la ecuación (1).

Ejemplo:

Transformar: $\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}$

Solución:

$$\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}=x+\sqrt{y}\quad ...\ (\alpha)$$

como: $A=10$; $B=108$, entonces:

$$C=\sqrt[3]{10^2-108}=-2$$

Luego en (1):

$$4x^3=10+3(-2)x$$
$$4x^3=10-6x\rightarrow \text{Se verifica para: } x=1$$

Ahora en (2):

$$x^2-y=-2\rightarrow 1^2-y=2$$
$$y=3$$

Reemplazando en (α):

$$\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}=1+\sqrt{3}$$

Observación:
El mismo método se utiliza para la forma:

$$\sqrt[3]{\sqrt{A}\pm\sqrt{B}}$$

reemplazando en todas las ecuaciones:
$\sqrt{A}$ por "A" y $\sqrt{x}$ por "x".

RACIONALIZACIÓN

Es el proceso que consiste en transformar el denominador irracional de una fracción; en otro que sea racional.

Factor racionalizador (F.R.)

Es aquella expresión irracional que, al multiplicarla, por una cierta expresión irracional dada la transforma en racional.

Propiedad

Para racionalizar una fracción bastará con multiplicar sus términos por el factor racionalizante del denominador.

Casos de Racionalización

I. Racionalización de Expresiones Monomiales

En este caso, el factor racionalizante es homogéneo con la expresión para racionalizar, debe cumplirse que luego de la multiplicación los exponentes del radicando deben ser iguales al índice o al menor de sus múltiplos.

Ejemplo:
Racionalizar el denominador de:

$$P = \frac{N}{\sqrt[7]{x^4y^{12}}}$$

Solución:
Hallemos el factor racionalizador:

$F.R. = \sqrt[7]{x^3y^2}$

Observe:

$4 + 3 = 7$ Múltiplo de 7

$12 + 2 = 14$ Múltiplo de 7

$$P = \frac{N}{\sqrt[7]{x^4y^{12}}} \cdot \frac{\sqrt[7]{x^3y^2}}{\sqrt[7]{x^3y^2}}$$

7 14

Se han escogido los exponentes de "x" e "y" de tal manera que el factor racionalizador sea divisible por 7.

Finalmente la expresión racionalizada sería:

$$P = \frac{N}{xy^2}\sqrt[7]{x^3y^2}$$

II. Racionalización de Suma o Resta de Radicales con índice 2 o sus potencias

En este caso, el factor racionalizante se obtiene utilizando la diferencia de cuadrados.

Recordemos:

$$\boxed{\left(\sqrt{A} + \sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A} - \sqrt{B}\right) = A - B}$$

Ejemplo 1:

Racionalizar el denominador de: $Q = \dfrac{k}{\sqrt[4]{x} - \sqrt{y}}$

Solución:
Hallemos el primer factor racionalizador:

$F.R._1 = \sqrt[4]{x} + \sqrt{y}$

$$Q = \frac{k}{\left(\sqrt[4]{x} - \sqrt{y}\right)} \cdot \frac{\left(\sqrt[4]{x} + \sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt[4]{x} + \sqrt{y}\right)}$$

$$Q = \frac{k\left(\sqrt[4]{x} + \sqrt{y}\right)}{\sqrt{x} - y}$$

Ahora el segundo factor racionalizador:

$F.R._2 = \sqrt{x} + y$

$$Q = \frac{k\left(\sqrt[4]{x} + \sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x} - y\right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{x} + y\right)}{\left(\sqrt{x} + y\right)}$$

$$Q = \frac{k\left(\sqrt[4]{x} + \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} + y\right)}{x - y^2}$$

Esta es la expresión racionalizada.

Ejemplo 2:
Racionalizar el denominador de:

$$A = \frac{a}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$$

Solución:
En este caso debemos buscar agrupaciones convenientes:

$F.R. = \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}$

Racionalizando:

$$A=\frac{a}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}$$

$$A=\frac{a\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}{5-2\left(\sqrt{10}+\sqrt{15}\right)-5}$$

$$A=-\frac{a\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}{2\left(\sqrt{10}+\sqrt{15}\right)}$$

$$A=-\frac{a\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{15}\right)}{2\left(\sqrt{10}+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{15}\right)}$$

$$A=-\frac{a\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{15}\right)}{10}$$

Ahora el segundo factor racionalizador:

$F.R._2=\sqrt{x}+y$

$$Q=\frac{k\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}-y\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{x}+y\right)}{\left(\sqrt{x}+y\right)}$$

$$Q=\frac{k\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+y\right)}{x-y^2}$$

Esta es la expresión racionalizada.

III. Racionalización de suma o resta de radicales con índice 3 o sus potencias

En este caso, el factor racionalizante se obtiene utilizando la suma o diferencia de cubos.

Recordemos:

$$\left(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\right)\left(\sqrt[3]{A}^2-\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B}^2\right)=A+B$$
$$\left(\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}\right)\left(\sqrt[3]{A}^2+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B}^2\right)=A-B$$

Ejemplo:

Racionalizar el denominador de: $R=\dfrac{P}{x-\sqrt[3]{y}}$

Solución:

Hallemos el factor racionalizador:

$F.R.=x^2+x\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y}^2$

Racionalizando:

$$R=\frac{P}{\left(x-\sqrt[3]{y}\right)}\cdot\frac{\left(x^2+x\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y}^2\right)}{\left(x^2+x\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y}^2\right)}$$

$$R=\frac{P\left(x^2+x\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y}^2\right)}{x^3-y}$$

En este última expresión se visualiza claramente el denominador racional.

IV. Racionalización de Radicales de la forma

$$\sqrt[n]{a}\pm\sqrt[n]{b}$$

En este caso, el factor racionalizante se obtiene utilizando cocientes notables, de la siguiente manera:

$$\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b^2}+\sqrt[n]{a^{n-3}b^3}+\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)$$
$$\left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b^2}+\sqrt[n]{a^{n-3}b^3}-\ldots-\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)$$

Ejemplo:

Racionalizar el denominador de:

$$R=\frac{M}{\sqrt[7]{x}-\sqrt[7]{b}}$$

Solución:

Hallemos el factor racionalizador:

$F.R.=\sqrt[7]{x^6}+\sqrt[7]{x^5b}+\sqrt[7]{x^4b^2}+\ldots+\sqrt[7]{b^6}$

Racionalizando:

$$R=\frac{M}{\left(\sqrt[7]{x}-\sqrt[7]{b}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt[7]{x^6}+\sqrt[7]{x^5b}+\sqrt[7]{x^4b^2}+\ldots+\sqrt[7]{b^6}\right)}{\left(\sqrt[7]{x^6}+\sqrt[7]{x^5b}+\sqrt[7]{x^4b^2}+\ldots+\sqrt[7]{b^6}\right)}$$

$$R=\frac{M}{\left(\sqrt[7]{x}-\sqrt[7]{b}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt[7]{x^6}+\sqrt[7]{x^5b}+\sqrt[7]{x^4b^2}+\ldots+\sqrt[7]{b^6}\right)}{\left(\sqrt[7]{x^6}+\sqrt[7]{x^5b}+\sqrt[7]{x^4b^2}+\ldots+\sqrt[7]{b^6}\right)}$$

$$R=\frac{M\left(\sqrt[7]{x^6}+\sqrt[7]{x^5b}+\sqrt[7]{x^4b^2}+\ldots+\sqrt[7]{b^6}\right)}{x-b}$$

Esta es la expresión con el denominador racionalizado.

Capítulo IX:

Números Complejos

CANTIDADES IMAGINARIAS

Se obtienen al extraer raíz de índice par a un número negativo.

Ejemplo: $\sqrt{-2};\ \sqrt[4]{-7};\ \sqrt[6]{-4};$ ... etc.

Unidad Imaginaria

La unidad imaginaria se obtiene al extraer raíz cuadrada de -1, y se representa de la siguiente manera:

$$\boxed{\sqrt{-1}=i}$$

también se define como:

$$\boxed{i^2=-1}$$

Potencias de la Unidad Imaginaria

$i^1=i$	$i^3=-i$
$i^2=-1$	$i^4=1$

Propiedades:

1. $\boxed{i^{4n}=1;\ n\in\mathbb{Z}}$

Ejemplo: $i^{480}=i^{4(120)}=1$

2. $\boxed{i^{4n+k}=i^k;\ (n;\ k\in\mathbb{Z})}$

Ejemplo:

$i^{47}=i^{4(11)+3}=i^3=-i$

$i^{-10}=i^{-3(4)+2}=i^2=-1$

Observación: Es conveniente recordar las siguientes propiedades aritméticas.

$(a+r)^n=\overset{\circ}{a}+r^n$

$(a-r)^n=\overset{\circ}{a}+r^n\ \ (n\to \text{par})$

$(a-r)^n=\overset{\circ}{a}-r^n\ \ (n\to \text{impar})$

Ejemplo:

$$i^{9^{10^{11^{12}}}}=i^{(\overset{\circ}{4}+1)^{10^{11^{12}}}}=i^{\overset{\circ}{4}+1^{10^{11^{12}}}}=i^{\overset{\circ}{4}+1}=i$$

NÚMEROS COMPLEJOS

Son aquellos números que tienen la forma:

$$\boxed{z=a+bi=(a;\ b);\ a,\ b\in\mathbb{R}}$$

Donde:

$$\begin{cases} a=\text{Re}(z) \text{ se llama, parte real de } z \\ b=\text{Im}(z) \text{ se llama, parte imaginaria de } z \end{cases}$$

Clasificación de los Complejos

Complejos Conjugados $(\overline{Z})$

Son aquellos que sólo difieren en el signo de la parte imaginaria.

Ejemplo:

$z=3+4i$; su conjugado es: $\overline{z}=3-4i$

Complejos Opuestos (Zop)

Son aquellos que sólo difieren en los signos de la parte real e imaginaria, respectivamente.

Ejemplo:

$z=5-2i$; su opuesto es: $z_{op}=-5+2i$

Complejos Iguales

Son aquellos que tienen partes reales e imaginarias, respectivamente, iguales.

Ejemplo:
De la igualdad: $a+bi=8-11i$
tenemos: $a=8$; $b=-11$

Complejo Nulo

Son aquellos que tienen su parte real e imaginaria, respectivamente, iguales a cero.

Si: $a+bi$, es nulo, entonces $a+bi=0$
Luego: $a=0$; $b=0$

Complejo Imaginario Puro

Es aquel cuya parte real es igual a cero y su parte imaginaria distinta de cero.

Si: $a+bi$, entonces es imaginario puro $\Rightarrow a=0$

Complejo Real

Si un complejo es real, entonces su parte imaginaria es igual a cero:

Si: $a+bi$, entonces es real $\Rightarrow b=0$

Representación de los Complejos

I. Representación Cartesiana o Geométrica

En este caso, el complejo está representado de la forma:

$$\boxed{z=a+bi}$$

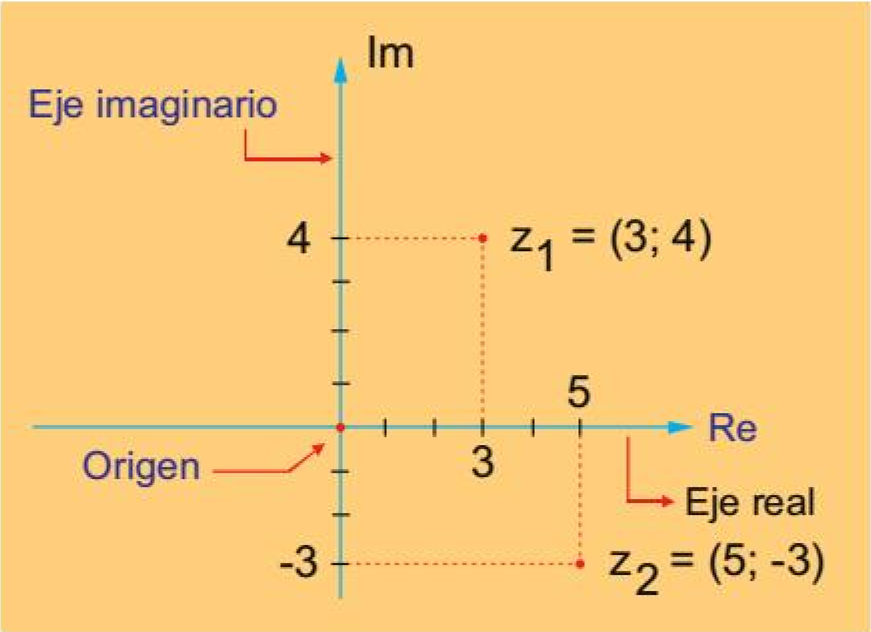
Gráfica del Complejo

Cada complejo es un punto en el plano, para ubicarlo se le representa en el llamado plano complejo, Gaussiano o de Argand, el cual está formado por un eje vertical (eje imaginario) y un eje horizontal (eje real).

Ejemplo: Graficar:
$z_1=3+4i$

$z_2=5-3i$

En el plano Gaussiano:



Observación: Cada complejo se representa por un punto en el plano al cual se le llama afijo del complejo.

II. Representación Polar o Trigonométrica:

En este caso, el complejo adopta la forma:

$$\boxed{z=\rho(\text{Cos}\theta+i\text{Sen}\theta)}$$

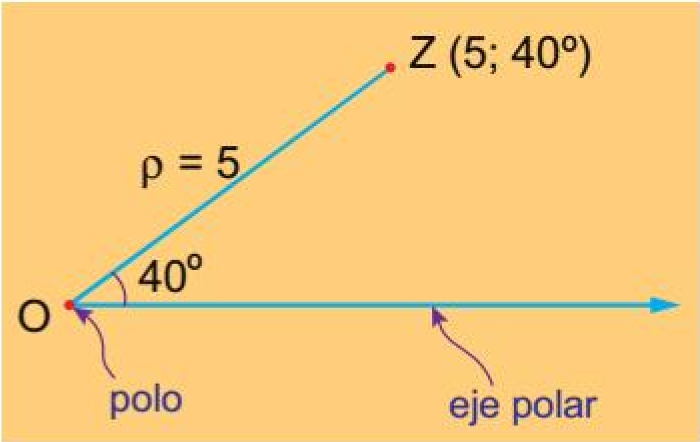
Donde: $\rho \rightarrow$ módulo; $\rho>0$
$\theta \rightarrow$ argumento; $0\le\theta\le 2\pi$

Gráfica del Complejo

En este caso, se utiliza el sistema de coordenadas polares el cual está formado por un punto fijo llamado polo y una semirecta que parte del polo, llamado eje polar. El módulo (ρ) es la distancia del polo al punto que representa el complejo y el argumento (θ) el ángulo positivo medido en sentido antihorario desde el eje polar hasta el radio vector $\overline{OZ}$.

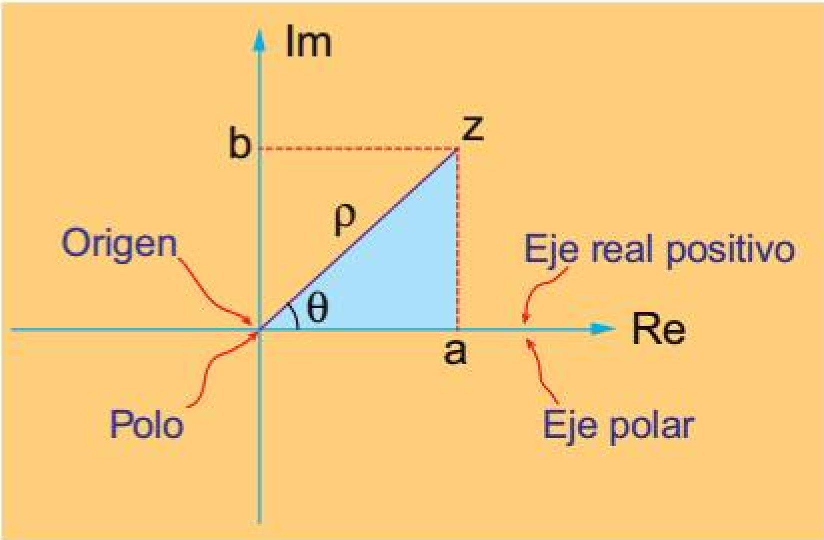
Graficar: $z=5(\text{Cos}40°+i\text{Sen}40°)$

En el sistema de coordenadas polares:



Relación entre la Representación Cartesiana y Polar

Sea el complejo: $z=a+bi \quad (a,\ b>0)$



En la figura:

$$\begin{cases} \rho=\sqrt{a^2+b^2} \\ a=\rho \text{Cos}\theta \\ b=\rho \text{Sen}\theta \\ \theta=\text{ArcTan}\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

$$\boxed{a+bi=\rho\text{Cos}\theta+(\rho\text{Sen}\theta)i}$$

Para transformar de cartesiana a polar se calcula ρ y θ. En el caso inverso, se calcula el valor de la función trigonométrica.

Aplicación:

1. Transformar: $z=3+4i$

* $\rho=\sqrt{3^2+4^2}=5$
* $\theta=\text{ArcTan}\dfrac{4}{3}=53°$
* $3+4i=5(\text{Cos}53°+i\text{Sen}53°)$

2. Transformar: $z=6(\text{Cos}37°+i\text{Sen}37°)$

$z=6(\text{Cos}37°+i\text{Sen}37°)$

$z=6\left(\dfrac{4}{5}+i\dfrac{3}{5}\right)$

$z=\dfrac{24}{5}+\dfrac{18}{5}i$

III. Representación de Euler

En este caso, se tiene:

$\rho(\text{Cos}\theta+i\text{Sen}\theta)=\rho e^{i\theta}$ Expresado en radianes

Se cumple:

$$\boxed{\text{Cos}\theta+i\text{Sen}\theta=e^{i\theta}}$$

Siendo: $e=2{,}71828....$ (base de los logaritmos naturales).

Asimismo:

$$\boxed{a+bi=\rho(\text{Cos}\theta+i\text{Sen}\theta)=\rho e^{i\theta}}$$

OPERACIONES CON COMPLEJOS

I. Operaciones en forma cartesiana

a) Adición y multiplicación

Se utilizan las mismas reglas algebraicas.

Ejemplo: $(3+i)(3+2i)-(5-4i)$

Solución:

$=9+6i+3i+2i^2-5+4i$

$=2+13i$

b) División

Se multiplica el numerador y denominador por el complejo conjugado de este último.

Álgebra

Ejemplo:

Dividir: $2+3i$ por $3+i$

$$z=\frac{2+3i}{3+i}\cdot\frac{3+i}{3+i}=\frac{6+7i-3i^2}{9-i^2}$$

$$z=\frac{9+7i}{10}$$

$$z=\frac{9}{10}+\frac{7}{10}i$$

c) Potenciación:

Se utiliza el teorema del binomio.

Ejemplo 1:

$$\begin{aligned}(2i+3)^2&=4i^2+12i+9\\&=-4+12i+9\\&=5+12i\end{aligned}$$

Ejemplo 2:

$$\begin{aligned}(3-2i)^3&=3^3-3(3)^2(2i)+3(3)(2i)^2-(2i)^3\\&=27-54i+36(-1)+8i\\&=-9-46i\end{aligned}$$

d) Radicación:

En general se asume que la raíz adopta la forma $(a+bi)$; luego a y b se hallan por definición de radicación.

Ejemplo: $\sqrt{5+12i}$

$\sqrt{5+12i}=a+bi$

Elevando al cuadrado: $(5+12i)=a^2-b^2+2abi$

Igualando: $5=a^2-b^2$; $12=2ab$

Resolviendo:

$$\left.\begin{aligned}a&=3\\b&=2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\sqrt{5+12i}=3+2i$$

$$\left.\begin{aligned}a&=-3\\b&=-2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\sqrt{5+12i}=-3-2i$$

Observación:

* $1\pm i=\pm 2i$
* $\dfrac{1+i}{1-i}=i$
* $\dfrac{1-i}{1+i}=-i$

Operaciones en forma polar

a) Multiplicación:

En este caso, los módulos se multiplican y los argumentos se suman.

$z_1=\rho_1(\text{Cos}\theta_1+i\text{Sen}\theta_1)$

$z_2=\rho_2(\text{Cos}\theta_2+i\text{Sen}\theta_2)$

$$\boxed{z_1z_2=\rho_1\rho_2\left[\text{Cos}(\theta_1+\theta_2)+i\text{Sen}(\theta_1+\theta_2)\right]}$$

b) División:

En este caso, los módulos se dividen y los argumentos se restan.

$z_1=\rho_1(\text{Cos}\theta_1+i\text{Sen}\theta_1)$

$z_2=\rho_2(\text{Cos}\theta_2+i\text{Sen}\theta_2)$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\text{Cos}(\theta_1-\theta_2)+i\text{Sen}(\theta_1-\theta_2)\right]}$$

c) Potenciación:

En este caso, el exponente eleva al módulo y multiplica al argumento.

$$\boxed{\left[\rho(\text{Cos}\theta+i\text{Sen}\theta)\right]^n=\rho^n\left[\text{Cos}\,n\theta+i\text{Sen}\,n\theta\right]^n}$$

Ecuaciones de Primer y Segundo Grado

ECUACIONES

Son igualdades condicionales, en las que al menos debe existir una letra llamada incógnita:

Ejemplo: $2x - 1 = 7 + x$

Es una ecuación de incógnita "x".

Solución de una ecuación

Es el valor o valores de la incógnita que reemplazados en la ecuación, verifican la igualdad.

Si la ecuación tiene una sola incógnita a la solución también se le llama raíz.

Ejemplo: $x - 3 = 10$
Solución o raíz: $x = 13$

Observaciones:

1. Si de los dos miembros de una ecuación se simplifican o dividen, factores que contengan a la incógnita, entonces, se perderán soluciones. (Esto se evita, si la expresión simplificada se iguala a cero).

Ejemplo:
Resolver: $(x+1)(x-1) = 7(x-1)$

Solución:
Simplificando:
$(x+1) \Rightarrow x + 1 = 7 \rightarrow x = 6$

Para no perder una **solución:**
$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

2. Si se multiplica ambos miembros de una ecuación por una expresión que contiene a la incógnita, entonces, se pueden introducir soluciones extrañas. (Esto se evita simplificando previamente).

Ejemplo:
Resolver: $\dfrac{x^2-1}{x-1} = 5$

$(x-1)$ pasa a multiplicar:
$x^2 - 1 = 5(x-1)$
Resolviendo:
$(x+1)\cancel{(x-1)} = 5\cancel{(x-1)}$
$x + 1 = 5$
$x = 4$

Obtenemos dos soluciones:
$\begin{cases} x = 1 & \text{Esta solución no verifica} \\ x = 4 & \text{Solución correcta} \end{cases}$

Pero esta es la manera correcta:
$\dfrac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} = 5$
$x + 1 = 5$
$x = 4$

Observe que este procedimiento nos permite hallar una única solución

3. Si ambos miembros de una ecuación se elevan a un mismo exponente, entonces, se pueden introducir soluciones extrañas.

Ejemplo: $\sqrt{x^2+7} = x - 7$

Elevando al cuadrado:
$$\left(\sqrt{x^2+7}\right)^2 = (x-7)^2$$

$x^2+7=x^2-14x+49$

$14x=42$

$x=3$

Esta solución no verifica la ecuación, por lo tanto es una solución extraña. Podemos afirmar que la ecuación no tiene solución, **es incompatible**.

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Son aquellas ecuaciones que adoptan la forma:

$$\boxed{ax+b=0}$$

Solución de la ecuación:
En: $ax+b=0$

Solución o raíz: $x=-\dfrac{b}{a}$

Discusión de la raíz

En: $ax+b=0 \to \text{raíz}: x=-\dfrac{b}{a}$

Entonces:
Si: $a=0;\ b=0 \to$ Ec. Indeterminada
Si: $a=0;\ b\neq 0 \to$ Ec. Incompatible
Si: $a\neq 0 \to$ Ec. Determinada.

Ejemplo:
Hallar, "a" y "b", si la ecuación:
$(a-3)x+b=5$, es indeterminada.

Solución: $x=\dfrac{5-b}{a-3}$

si es indeterminada:
$5-b=0 \to b=5$
$a-3=0 \to a=3$

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Forma General:

$$\boxed{ax^2+bx+c=0}$$

Donde:
x: incógnita, asume dos valores
$a,\ b \wedge c \in \mathbb{R} / a \neq 0$

Resolución de la Ecuación:

1. Por Factorización:

* Resolver la ecuación:

$$x^2-x-6=0$$

Solución:
Factorizando:

$$(x-3)(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-2 \end{cases}$$

$C.S.=\{3;\ -2\}$

* Resolver la ecuación:

$$4x^2-9=0$$

Solución:
Factorizando:

$$(2x+3)(2x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{3}{2} \\ x=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$C.S.=\left\{-\dfrac{3}{2};\ \dfrac{3}{2}\right\}$

2. Por la Fórmula General:

Si: $x_1;\ x_2$ son las raíces de la ecuación

$$ax^2+bx+c=0\ ;\ a\neq 0$$

Estas se obtienen a partir de la relación:

$$\boxed{x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Ejemplo:
* Resolver la ecuación:
$3x^2-2x-4=0$

Observe que: $a=3;\ b=-2;\ c=-4$

$$x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(3)(-4)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{52}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{6}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{3}$$

$$C.S. = \left\{ \frac{1+\sqrt{13}}{3}; \frac{1-\sqrt{13}}{3} \right\}$$

Discriminante (Δ) dada la ecuación cuadrática en "x": $ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$. Se define como:

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

* Para la ecuación: $2x^2 - 5x + 1 = 0$
su discriminante es:

$$\Delta = (-5)^2 - 4(2)(1)$$

$$\Delta = 25 - 8$$

$$\Delta = 17$$

Propiedad del Discriminante: el discriminante de una ecuación cuadrática permite decidir qué clase de raíces presenta; es decir:

1. Si: $\Delta > 0$, la ecuación tiene raíces reales y diferentes.
2. Si: $\Delta = 0$, la ecuación tiene raíces reales e iguales.
3. Si: $\Delta < 0$, la ecuación tiene raíces imaginarias y conjugadas.

Relación entre las Raíces y los Coeficientes (propiedades de las raíces) de una ecuación cuadrática: Si x_1; x_2 son las raíces de la ecuación cuadrática en "x".

$$ax^2 + bx + c = 0\,;\ a \neq 0$$

Se cumple:

1. Suma: $s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

2. Producto: $p = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

*Para la ecuación: $2x^2 - 10x + 1 = 0$

Se tiene:

$$x_1 + x_2 = -\frac{-10}{2} = 5$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}$$

Observación: para determinar la diferencia de las raíces se recomienda utilizar la identidad de Legendre.

$$\boxed{(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4(x_1 \cdot x_2)}$$

Casos Particulares: dada la ecuación cuadrática en "x", $ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$ de raíces x_1; x_2 si éstas son:

1. Simétricas, se cumple: $x_1 + x_2 = 0$
2. Recíprocas, se cumple: $x_1 \cdot x_2 = 1$

Reconstrucción de la Ecuación Cuadrática en "x": siendo "s" y "p", suma y producto de raíces, respectivamente, toda ecuación cuadrática en "x" se determina según la relación:

$$\boxed{x^2 - sx + p = 0}$$

Ecuaciones Cuadráticas Equivalentes:
Dadas:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$$

Se cumple:

$$\boxed{\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}}$$

Ecuaciones Cuadráticas con una raíz común:
Dadas:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$$

Se cumple:

$$\boxed{(ab_1 - a_1b)(bc_1 - b_1c) = (ac_1 - a_1c)^2}$$

Ecuaciones de Grado Superior

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

Toda ecuación polinomial P(x) = 0, donde P(x) es un polinomio de cualesquiera coeficiente numérico de grado mayor que la unidad, tiene por lo menos una raíz generalmente compleja.

Corolario: Toda ecuación polinomial de grado "n" tiene exactamente "n" raíces.

* $x^2 - x + 5 = 0$ tiene 2 raíces
* $x^7 + x = 1$ tiene 7 raíces

Teorema de Cardano - Viette:

Dada la ecuación polinomial de grado "n", cuya estructura es:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \ldots + a_n = 0$$

Si sus raíces son:

$x_1;\ x_2;\ x_3;\ \ldots, x_n$

Se cumple:

1. Suma de raíces:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

2. Suma de productos binarios:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_2}{a_0}$$

3. Suma de productos ternarios:

$$x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_5 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_3}{a_0}$$

En general, si "S_k" representa la suma de los productos de las raíces tomadas de "k" en "k", se cumple:

$$\boxed{S_k = (-1)^k \cdot \frac{a_k}{a_0}}$$

Veamos un ejemplo para la ecuación:

$$2x^3 + 5x^2 + 10x - 1 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{5}{2}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{10}{2} = 2$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$$

Teoremas Adicionales:

1. Paridad de raíces imaginarias:

Sea $P(x) = 0$ una ecuación polinomial, donde P(x) es un polinomio de coeficientes reales, si una raíz de la ecuación es el número imaginario $a + bi$, otra raíz será $a - bi$.

2. Paridad de raíces irracionales:

Sea $P(x) = 0$ una ecuación polinomial, donde P(x) es un polinomio de coeficientes racionales, si una raíz de la ecuación es el número irracional: $a + \sqrt{b}\ /\ a \in \mathbb{Q} \wedge \sqrt{b} \in \mathbb{Q}'$, entonces, otra raíz será: $a - \sqrt{b}$.

ECUACIÓN DE TERCER GRADO: (CÚBICA)

Forma general:

$$\boxed{ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad \ldots (1)}$$

Donde:

x: incógnita, asume tres valores:

$a,\ b,\ c \wedge d \in \mathbb{R}\ /\ a \neq 0$

Si en la forma general se sustituye "x" por $x-\frac{b}{3a}$, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\boxed{x^3+px+q=0 \quad ...\ (2)}$$

cuyo discriminante se denota por D y se define según la relación:

$$D=\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2$$

Con lo cual las raíces de (2) se obtienen según:

$$x_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}}$$

$$x_2=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}}\cdot W+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}}\cdot W^2$$

$$x_3=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}}\cdot W^2+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}}\cdot W$$

siendo: $W=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\ /\ i=\sqrt{-1}$

Observación: Es recomendable utilizar el proceso anterior siempre y cuando la ecuación dada no pueda resolverse por factorización.

Ecuación Bicuadrada: Es aquella ecuación polinomial de cuarto grado que presenta la siguiente forma:

$$\boxed{ax^4+bx^2+c=0}$$

Donde:
x: incógnita, asume cuatro valores
$a,\ b\wedge c\in\mathbb{R}\ /\ a\neq 0$

Teorema del Conjunto Solución

Toda ecuación bicuadrada:
$ax^4+bx^2+c=0$, donde "m" y "n" son dos raíces no simétricas presenta por conjunto solución.

$$\boxed{C.S.=\{m;\ -m;\ n;\ -n\}}$$

Propiedad de las Raíces: Siendo "m" y "n" las raíces no simétricas de la ecuación bicuadrada $ax^4+bx^2+c=0$, se cumple:

I. $m^2+n^2=-\frac{b}{a}$

II. $m^2n^2=\frac{c}{a}$

Reconstrucción de la ecuación bicuadrada en "x":

Siendo "m" y "n" las raíces no simétricas, tenemos:

$$\boxed{x^4-(m^2+n^2)x^2+m^2n^2=0}$$

ECUACIÓN BINOMIA

Forma general:

$$\boxed{ax^n+b=0}$$

Donde:
x: incógnita, asume "n" valores.
$a\wedge b\in\mathbb{R}\ /\ a\neq 0\wedge b\neq 0$

Observación: Para resolver una ecuación binomia, se podrá aplicar algún producto notable, cierto criterio de factorización o la radicación de los números complejos.

ECUACIÓN TRINOMIA

Forma general:

$$\boxed{ax^{2n}+bx^n+c=0}$$

Donde:
x: incógnita, asume "2n" valores. $n\in\mathbb{N}\ /\ n\geq 2$
$a\wedge b\wedge c\in\mathbb{R}\ /\ a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0$

Observación: Para resolver una ecuación trinomia se recomienda que, en la forma general, se realice el siguiente cambio: x^n por "y", con lo cual la ecuación sería:

$$ay^2 + by + c = 0$$

Donde los valores de "y" se podrían obtener, según los criterios vistos en la resolución de una ecuación cuadrática, para finalmente resolver la siguiente ecuación binomia:

$$x^n = y$$

Ecuación Recíproca: $P(x) = 0$, será una ecuación recíproca, si P(x) es un polinomio cuyos coeficientes de sus términos equidistantes son iguales.

Ejemplos:

* $2x^2 + 5x + 2 = 0$
* $x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$
* $5x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 2x + 5 = 0$
* $4x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$

Propiedades:

1. En toda ecuación recíproca, se cumple que si: $r \neq 0$ es una raíz, entonces, otra raíz será $\frac{1}{r}$.
2. Toda ecuación recíproca de grado impar acepta como raíz a 1 ó -1.
3. Si: $P(x) = 0$ es una ecuación recíproca de grado "n", se verifica lo siguiente:

$$\boxed{P(x) = x^n \cdot P\left(\frac{1}{x}\right)}$$

ECUACIÓN TRASCENDENTE

Una **ecuación trascendente** es una igualdad entre dos expresiones matemáticas en las que aparecen una o más incógnitas relacionadas mediante operaciones matemáticas, que no son únicamente algebraicas, y cuya solución no puede obtenerse empleando solo las herramientas propias del álgebra.

Una ecuación que no se reduce a una ecuación algebraica mediante transformaciones algebraicas se denomina ecuación trascendente, de otra manera, una ecuación H(x) = j(x) se llama trascendente , si por lo menos una de las funciones H(x) o j(x) no es algebraica. Estas ecuaciones conllevan logaritmos de cualquiera base de las incógnitas; las incógnitas como exponentes o como argumentos de expresiones trigonométricas. Su solución es posible gracias al análisis numérico, programación y algunos métodos como el de Newton Raphson o el de las tangentes.

Ejemplos:

- $xe^x = 1$
- $5^x = 9^{x+1} \cdot 3^x$
- $7^{t+1} = 49^{t-2} + 343^{t-3}$
- $3\log_{11}(5y-1) + \log_{11}(8y-7) = 1$
- $\text{Cos}^2 x = \text{Sen}x + \frac{1}{3}$
- $2\text{sh}t = 5\text{ch}t + 7$
- $\text{Arcsen}x^2 + 2x = \frac{\pi}{4}$
- $re^{-8r} = 2r + 1$
- $\text{Cosh}x + \ln(2x-5) = 2$

ECUACIÓN DIFERENCIAL

Una ecuación diferencial es una ecuación matemática que relaciona una función con sus derivadas. En las matemáticas aplicadas, las funciones usualmente representan cantidades físicas, las derivadas representan sus razones de cambio, y la ecuación define la relación entre ellas. Como estas relaciones son muy comunes, las ecuaciones diferenciales juegan un rol primordial en diversas disciplinas, incluyendo la ingeniería, la física, la química, la economía, y la biología.

Ejemplos:

$$x^2 \frac{dy}{dx} - 4xy \frac{d^2y}{dx^2} = 2$$

$$3xy' + 2x^2y'' + xy = 0$$

Matrices y Determinantes

MATRICES

Una matriz es un arreglo rectangular de elementos dispuestos en filas y columnas.

Para representar a una matriz, se utiliza letras mayúsculas.

Ejemplos:

$$* \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \xleftrightarrow{\text{Fila}} \quad \updownarrow \text{columna}$$

$$* \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Orden de una Matriz

Viene dada por la representación $m \times n$, donde "m" es el número de filas y "n" el número de columnas de la matriz. Para los ejemplos citados anteriormente, tenemos:

*A es una matriz de orden 2 × 3
*B es una matriz de orden 3 × 3

Forma General de una Matriz de "m" filas y "n" Columnas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & & & & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Donde: a_{ij} es el elemento genérico, ubicado en la fila "i", columna "j".

En forma abreviada se tendrá:

$$A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n} \quad \begin{vmatrix} i = 1, 2, 3, \ldots, m = \overline{1;m} \\ j = 1, 2, 3, \ldots, n = \overline{1;n} \end{vmatrix}$$

Matrices Especiales

1. Matriz Fila:
Es aquella matriz que tiene una sola fila.

*[1 5 7 10]

2. Matriz Columna:
Es aquella matriz que tiene una sola columna.

$$* A = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

3. Matriz Rectangular:
Es aquella matriz, donde el número de filas y el número de columnas son diferentes.

$$* A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Matriz Cuadrada:
Es aquella matriz, donde el número de filas y el número de columnas son iguales.

$$* A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

5. Matriz Nula:
Es aquella matriz, donde todos sus elementos son iguales a cero.

$$* A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

* $A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

Igualdad de Matrices:

Dadas las Matrices:
$A=[a_{ij}]_{m\times n} \wedge B=[b_{ij}]_{m\times n}$

si estas son iguales, es decir: A = B, se verifican simultáneamente las condiciones:

I. A y B son de igual orden: $m\times n$.
II. Los elementos correspondientes son iguales:
$a_{ij}=b_{ji};\ \forall\ i, j$

Operaciones con Matrices

I. Adición: Dadas las matrices de igual orden
$A=[a_{ij}]_{m\times n} \wedge B=[b_{ij}]_{m\times n}$

se define:

$$\boxed{A+B=\left[a_{ij}\right]_{mxn}+\left[b_{ij}\right]_{mxn}=\left[a_{ij+b_{ij}}\right]_{mxn}}$$

*Hallar la matriz A + B, a partir de:

$$A=\begin{bmatrix}2&1&3\\0&-1&2\end{bmatrix} \wedge B=\begin{bmatrix}1&2&5\\-1&4&3\end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}2&1&3\\0&-1&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&2&5\\-1&4&3\end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}(2+1)&(1+2)&(3+5)\\(0-1)&(-1+4)&(2+3)\end{bmatrix}$$

$$\therefore A+B=\begin{bmatrix}3&3&8\\-1&3&5\end{bmatrix}$$

II. Multiplicación:

II.1 Multiplicación de un escalar por una matriz.

Sean: $A=[a_{ij}]_{m\times n} \wedge k\,\varepsilon\,R$, se define:

$$\boxed{K.A=K.\left[a_{ij}\right]_{mxn}=\left[K.a_{ij}\right]_{mxn}}$$

* Multipliquemos por 2 a la matriz.

$$A=\begin{bmatrix}2&1&4\\-1&3&2\end{bmatrix} \Leftrightarrow 2.A=2.\begin{bmatrix}2&1&4\\-1&3&2\end{bmatrix}$$

$$\therefore 2A=\begin{bmatrix}4&2&8\\-2&6&4\end{bmatrix}$$

II.2 Multiplicación de una matriz fila por una matriz columna.

Sean: $A=[a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \ldots a_{1n}]$

$$B=\begin{bmatrix}b_{11}\\b_{21}\\b_{31}\\\vdots\\b_{n1}\end{bmatrix}$$

Se define:

$$\boxed{A.B=\left[A_{11}.b_{11}+a_{12}.b_{21}+a_{13}-b_{31}+..+a_{1n}.b_{n1}\right]}$$

*Multipliquemos A por B, donde:

$$A=[2\ \ 1\ \ 3] \wedge B=\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$$

$$A.B=[2\ \ 1\ \ 3].\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$$

A . B = [(2).(2)+(1).(4)+(3).(6)]

A . B = [4+4+18] ∴ A . B = [26]

III.3 Multiplicación de las Matrices

Dadas las matrices A y B, existe el producto matricial de A por B denotado por A.B, si se verifica lo siguiente:

$$\boxed{\#\text{ de columnas de A} = \#\text{ de filas de B}}$$

luego:

$$A_{m\times \underbrace{p)\,.\,B_{(p}}}{}_{\times n} = C_{m\times n}$$

* Veamos un **Ejemplo:**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \wedge B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

¿Existe A . B?, veamos:

A tiene orden $2\times 2 \rightarrow \#$ col = 2
B tiene orden $2\times 3 \rightarrow \#$ fil = 2

como: # col de A = # fil de B se afirma que si existe A . B, cuyo orden es de 2×3.

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Ahora se multiplica de forma similar que el caso (II.2).

$$A.B = \begin{bmatrix} (2).(2)+(-1).(1) & (2).(-2)+(-1).(2) & (2)(5)+(-1)(-3) \\ (3).(2)+(1)(1) & (3)(-2)+(1).(2) & (3)(5)+(1)(3) \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 4-1 & -4-2 & 10+3 \\ 6+1 & -6+2 & 15-3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A.B = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 13 \\ 7 & -4 & 12 \end{bmatrix}$$

¿Existe B.A?, veamos:
col de B = 3 y # fil de A = 2 como:

$$\#\text{ columnas de B} \neq \#\text{ filas de A}$$

Se podrá afirmar que BA no existe.

En general: El producto matricial no es conmutativo.

Teoremas:

Sean A, B y C matrices para las cuales se define la adición y/o multiplicación, además al escalar "k".

1.K . (A+B) = K . A + K . B
2.A + B = B + A
3.A . B . C = (A.B).C = A.(B.C)
4.A.(B+C) = A.B + A.C
5.A.B = 0 no implica A = 0 $\vee$ B = 0
6.A.B = A.C no implica B = C

Propiedades:

Sean las matrices A y B, de modo que existen A.B y B.A.

1. Si: A.B = B.A, se dice que A y B son matrices conmutables.
2. Si: A.B = -B.A se dice a A y B son matrices anticonmutables.

III. Potenciación:

Siendo A una matriz cuadrada y "n" un entero positivo, se define:

$$A^n = \begin{cases} A & ; n = 1 \\ \underbrace{A.A.A. \ldots . A}_{\text{"n" veces}} & ; n \geq 2 \end{cases}$$

*Hallar A^2 si: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} (2)(2)+(-1)(3) & (2)(-1)+(-1)(1) \\ (3)(2)+(1)(3) & (3)(-1)+(1)(1) \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4-3 & -2-1 \\ 6+3 & -3+1 \end{bmatrix} \therefore A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 9 & -2 \end{bmatrix}$$

Transpuesta de una Matriz

Dada una matriz A, existe su matriz transpuesta denotada por A^T y definida como aquella matriz que se obtiene al transformar todas las filas de A en columnas.

$$A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}\Rightarrow A^{T}=\left[a_{ij}\right]_{n\times m}$$

*Veamos un **Ejemplo:**

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 4\\ 0 & -1 & 5\end{bmatrix}\Rightarrow A^{T}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\\ 4 & 5\end{bmatrix}$$

Propiedades:

Siendo A y B matrices, y el escalar "K".

1. $(A+B)^{T}=A^{T}+B^{T}$
2. $(K.A)^{T}=K.A^{T}$
3. $(A^{T})^{T}=A$
4. $(A.B)^{T}=B^{T}.A^{T}$

Estudio de las Matrices Cuadradas

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & & & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & & a_{nn}\end{bmatrix}_{n\times n}$$

DS DP

Observaciones:

1. Toda matriz cuadrada de "n" filas y "n" columnas es de orden "n".
2. La diagonal trazada de izquierda a derecha recibe el nombre de Diagonal Principal (D.P.).
3. La diagonal trazada de derecha a izquierda recibe el nombre de Diagonal Secundaria (D.S.).

Traza de A (Traz(A))

Se denomina así, a la suma de todos los elementos de la diagonal principal.

$$\text{Traz}(A)=a_{11}+a_{22}+a_{33}+\ldots+a_{nn}$$

*Para la matriz

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5 & 4\\ 1 & 8 & 7\\ -1 & 0 & -4\end{bmatrix}$$

D.P.

Traz(A) = (2)+(8) + (-4)

$\therefore$ Traz(A) = 6

Propiedades:

Siendo A y B matrices y el escalar "K".

1.Traz (A+B) = Traz(A) + Traz(B)
2.Traz (K . A) = K . Traz (A)
3.Traz (A . B) = Traz (B . A)

Matrices Cuadradas Especiales

1. Matriz Diagonal: Es aquella matriz no nula, donde todos los elementos fuera de la diagonal principal son ceros.

Ejemplos:

$$*\,A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$*\,B=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

2. Matriz Escalar: Es aquella matriz diagonal donde todos los elementos de la diagonal principal son iguales.

Ejemplo:

$$*A=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{bmatrix}$$

3. Matriz Identidad (I): Es aquella matriz escalar donde todos los elementos de la diagonal principal son iguales a la unidad.

Ejemplo:

$$*I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

4. Matriz triangular Superior: Es aquella matriz donde solamente todos los elementos ubicados debajo de la diagonal principal son ceros.
Ejemplo:

$$*A=\begin{bmatrix}5&4&2\\0&1&7\\0&0&4\end{bmatrix}$$

5. Matriz Triangular Inferior: Es aquella matriz donde solamente todos los elementos ubicados encima de la diagonal principal son ceros.
Ejemplo:

$$*A=\begin{bmatrix}3&0&0\\1&4&0\\2&-1&8\end{bmatrix}$$

Características Notables de algunas Matrices Cuadradas:

1. Matriz Simétrica: Si A es una matriz simétrica, verifica:

$$\boxed{A_T=A}$$

2. Matriz Antisimétrica: Si A es una matriz antisimétrica, verifica:

$$\boxed{A_T=-A}$$

3. Matriz Idempotente: Si A es una matriz idempotente, verifica:

$$\boxed{A^2=A}$$

4. Matriz Involutiva: Si A es una matriz involutiva, verifica:

$$\boxed{A^2=I;(\text{matrizidentidad})}$$

5. Matriz Nilpotente: Si A es una matriz nilpotente, verifica:

$$\boxed{A^p=0;(\text{matriznula})}$$

p: índice de nilpotencia.

DETERMINANTES

Un determinante es la relación funcional que aplicada a una matriz cuadrada la transforma en un escalar (número real).

Si A es una matriz cuadrada, su determinante se denota así: det(A) o |A|.

Determinante de Orden Uno

$$A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\rightarrow|A|=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$$

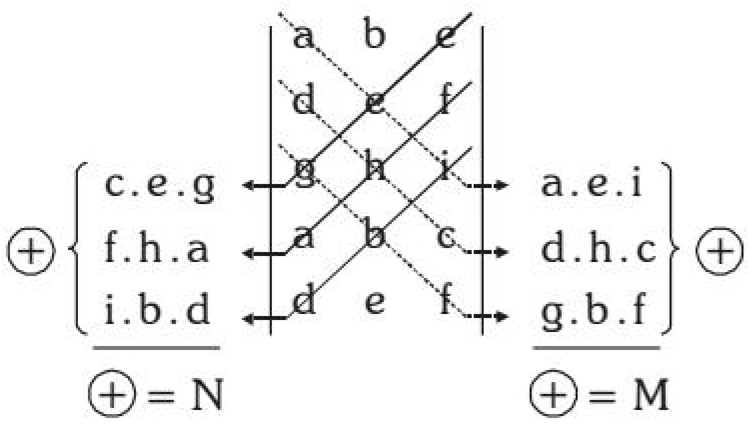
$$\boxed{|A|=a.d-b.c}$$

Determinante de Orden Tres:

$$A=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$$

Según, la Regla de Sarrus:

Álgebra



$$\boxed{|A| = M - N}$$

Menor Complementario de una Componente

El menor complementario de la componente (elemento) a_{ij} denotado por M_{ij} es el determinante de la matriz que resulta al eliminar la fila "i" y la columna "j" de la matriz dada.

Para:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

el menor complementario de $a_2 = 4$ es:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (5).(3) - (1).(2)$$

$$M_{12} = 15 - 2$$

$$\therefore\ M_{12} = 13$$

Cofactor de una Componente

El cofactor de la componente (elemento) a_{ij} denotado por A_{ij}, se define de la manera siguiente:

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j}.M_{ij}}$$

Para:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

el cofactor de la componente a_{13} es:

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \quad M_{13} = (-1)^4.\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$A_{13} = (1).[(1).(3) - (2).(-1)]$$

$$C_{13} = 3 + 2$$

$$\therefore\ C_{13} = 5$$

Teorema: El determinante de una matriz será igual a la suma de los productos obtenidos al multiplicar todos los elementos de una fila (o columna) por sus respectivos cofactores.

Para:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

con los elementos de la primera fila:

$$|A| = 2.\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1.\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-3).\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$|A| = (2)(9) - (1)(7) + (-3)(-13)$
$|A| = 18 - 7 + 39$
$\therefore\ |A| = 50$

Observación:

Para aplicar el teorema anterior, se recomienda escoger la fila (o columnas) que presente más ceros.

Propiedades:

Dadas las matrices cuadradas A y B, y el escalar "K".

1. $|A . B| = |A| . |B|$
2. $|A^T| = |A|$
3. $|K.A| = K^n.|A|$; "n" orden de A.
4. Si dos filas (o columnas) son proporcionales, el determinante será igual a cero.
5. Si todos los elementos de una fila (o columna) son ceros, el determinante será igual a cero.
6. Si se permutan dos filas (o columnas) consecutivas, el determinante cambia de signo.

Álgebra

7. El determinante no varía si a todos los elementos de una fila (o columna) se les aumenta un múltiplo de otra.
8. El determinante de una matriz triangular superior, triangular inferior y diagonal se obtiene multiplicando todos los elementos de la diagonal principal.

Determinante de Vandermonde

1.De orden dos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = b - a$$

2.De orden tres:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (c-b)(c-a)(b-a)$$

3.De orden cuatro:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)$$

Una matriz cuadrada A es no singular, si, $|A| \neq 0$, asimismo, si: $|A| = 0$, la matriz A será singular.

MATRIZ INVERSA

Dada una matriz cuadrada no singular A, si existe una única matriz B cuadrada del mismo orden, tal que:

A . B = B . A = I (matriz identidad), entonces, definimos B como matriz inversa de A y lo denotamos por A^{-1}.

Teorema: Una matriz cuadrada tiene inversa, si y sólo si, es una matriz no singular; en tal caso se dice que la matriz es inversible.

Propiedades:

Sean A y B matrices cuadradas no singulares y el escalar "K".

1. $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$
2. $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$
3. $(A^{-1})^{-1} = A$
4. $(K.A)^{-1} = K^{-1}.A^{-1}$
5. $|A^{-1}| = |A|^{-1} = \dfrac{1}{|A|}$

Cálculo de Matrices Inversas

1.De orden uno

$$A = [a] \rightarrow A^{-1} = [\tfrac{1}{a}]\ ;\ a \neq 0$$

2.De orden dos

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}.\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Observación:

Para matrices de orden mayores o iguales a tres se recomienda utilizar el método de Gauss-Jordan, el cual consiste en construir una matriz ampliada $(A \vdots I)$ donde por operaciones elementales debemos encontrar otra matriz ampliada $(I \vdots B)$, con lo cual se podrá afirmar que B es la inversa de A, es decir: $B = A^{-1}$

Álgebra

Capítulo XIII:

Sistemas de Ecuaciones

SISTEMAS LINEALES

Forma General:

Consideremos un sistema lineal de "m" ecuaciones con "n" incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3} + x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Donde:

$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots\dots\dots \wedge\ x_n$ son las incógnitas, siendo el conjunto solución de la forma:

$$CS = \{(x_1;\ x_2;\ x_3;\ \dots\dots\ x_n)\}$$

Observación:

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales, existen diversos métodos como por ejemplo:

* Método de Sustitución.
* Método de Reducción.
* Método de Igualación.
* Método Matricial.
* Método de Cramer (Determinantes).

Sistema Lineal Homogéneo:

Es aquel donde los términos independientes son nulos (ceros).

Ejemplo:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \ \dots\dots\ (1) \\ 2x + y + z = 0 \ \dots\dots\ (2) \\ x - 3y - 2z = 0 \ \dots\dots\ (3) \end{cases}$$

Un sistema lineal homogéneo siempre es compatible donde una de sus soluciones es la solución trivial (cada incógnita es igual a cero). Para el ejemplo:

Solución trivial = (0; 0; 0).

Asimismo, el sistema lineal homogéneo puede tener otras soluciones, las llamadas no triviales.

Resolución de un Sistema lineal según el Método de Cramer:

Dado un sistema lineal de "n" ecuaciones con "n" incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_n + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Consideremos:

1. Determinante del Sistema (Δ_s)

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2. Determinante de una Incógnita (Δ_i)

Se obtiene a partir del determinante anterior, reemplazando los elementos de la columna de coeficientes de la incógnita en referencia por los términos independientes.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

cada incógnita del sistema se obtendrá, según la relación.

$$\boxed{x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_s}; \forall_i = \overline{1;n}}$$

Ejemplo:

Resolver:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 7 & \ldots (1) \\ 3x - 2y = 3 & \ldots (2) \end{cases}$$

Observar que:

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (2)(-2) - (3)(5)$$

$$\Delta_s = -4 - 15$$

$$\Delta_s = -19$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (7)(-2) - (3)(5)$$

$$\Delta_x = -14 - 15$$

$$\Delta_x = -29$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (3)(7)$$

$$\Delta_x = 6 - 21$$

$$\Delta_x = -15$$

Calculamos las soluciones:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s} \Rightarrow x = \frac{29}{19}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta_s} \rightarrow y = \frac{15}{19}$$

$$\therefore CS = \left\{ \left(\frac{29}{19}; \frac{15}{19} \right) \right\}$$

Teorema: Dado el sistema lineal homogéneo.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

si este admite soluciones aparte de la trivial, el determinante del sistema deberá ser nulo, es decir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Análisis de las Soluciones de un Sistema Lineal

Dado el sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

donde la solución se obtiene a partir de:

$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_s}$, luego:

1. El sistema tiene solución única, si y sólo si: $\Delta_s \neq 0$
2. El sistema tiene infinitas soluciones, si y sólo si: $\Delta_i = 0 \wedge \Delta_s = 0$

Álgebra

3. El sistema no tiene solución si siendo $\Delta_s = 0$. Existe algún $\Delta_i \neq 0$

Propiedad

Un caso particular de lo visto anteriormente se presenta en el sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} ax + by = c \ .... \ (1) \\ a_1x + b_1y = c_1 .... \ (2) \end{cases}$$

1. El sistema será compatible determinado, es decir, tendrá solución única, si se verifica:

$$\boxed{\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}}$$

2. El sistema será compatible indeterminado, es decir, tendrá infinitas soluciones, si se verifica:

$$\boxed{\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}}$$

3. El sistema será incompatible, es decir no tendrá solución si se verifica:

$$\boxed{\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b} \neq \frac{c}{c_1}}$$

SISTEMAS NO LINEALES

Criterios de Resolución:

1. Si el sistema está conformado por ecuaciones de diferentes grados se deberá encontrar una nueva ecuación en función de una sola incógnita, para a partir de ésta determinar las soluciones del sistema.

Ejemplo:

Resolver:

$$\begin{cases} x + y = 7 \quad ... \ (1) \\ xy = 10 \quad ... \ (2) \end{cases}$$

De la ecuación (1): $x = 7 - y$

Reemplazando en (2): $(7 - y)y = 10$

Efectuando, tenemos: $y^2 - 7y + 10 = 0$

$(y-5)(y-2) = 0$

De donde, obtenemos: $y = 5 \vee y = 2$

Si: y = 5 en (2): $x = 2$

$\Rightarrow$ Sol: (2; 5)

Si: $y = 2$ en (2): $x = 5$

$\Rightarrow$ Sol: (5; 2)

$\therefore \text{C.S.} = \{(2;\ 5),\ (5;\ 2)\}$

2.Si el sistema está formado por ecuaciones, cuya parte literal es homogéneo y de igual grado se recomienda realizar la siguiente sustitución: $y = Kx$, donde el parámetro "K" se determinará por eliminación de las incógnitas $x \wedge y$.

Una vez encontrado el valor de "K", fácilmente se obtendrá el valor de cada incógnita del sistema.

Ejemplo:

Resolver:

$$\begin{cases} x^2 + 3xy + 3y^2 = 21 \quad ... \ (1) \\ x^2 + xy + 3y^2 = 15 \quad ... \ (2) \end{cases}$$

Hagamos: $x = Ky$

Reemplazando en (1):

$y^2(K^2 + 3K + 3) = 21$

Reemplazando en (2):

$y^2(K^2 + K + 3) = 15$

Dividiendo m.a-m: $\dfrac{K^2 + 3K + 3}{K^2 + K + 3} = \dfrac{7}{5}$

De donde, obtenemos: $K^2 - 4K + 3 = 0$

$K = 3 \vee K = 1$

Como: $x = Ky \Rightarrow x = 3y \vee x = y$

Capítulo XIV:

Desigualdades e Inecuaciones Valor Absoluto

DESIGUALDADES

Se denomina desigualdad a la comparación que se establece entre dos expresiones reales, mediante los signos de relación >, <; ≥ o ≤.

Ejemplo:

Siendo, a y b números reales:

a > ba mayor que b
a < ba menor que b
a ≥ ba mayor o igual que b
a ≤ ba menor o igual que b

Observación: A los signos de relación > o < se les da el nombre de signos simples mientras que a ≥ o ≤ se les denomina signos dobles.

Axiomas de la desigualdad

1. Ley de Tricotomía
$\forall a \wedge b \varepsilon R : a > b \vee a < b \vee a = b$

2. Ley de Transitividad
$\forall a, b \wedge c \varepsilon R / a > b \wedge b > c \rightarrow a > c$

3. Ley Aditiva
$\forall a, b \wedge c \varepsilon R / a > b \rightarrow a + c > b + c$

4. Ley Multiplicativa

4.1. $\forall a, b \varepsilon R \wedge c \varepsilon R^{+} / a > b \rightarrow ac > bc$

4.2. $\forall a, b \varepsilon R \wedge c \varepsilon R^{-} / a > b \rightarrow ac < bc$

Equivalencias Usuales:

Siendo a, b, c números reales.

1. $a \geq b \Leftrightarrow a > b \vee a = b$

2. $a < b < c \Leftrightarrow a < b \wedge b < c$

Teoremas de la Desigualdad

1. $\forall a \varepsilon R : a^2 \geq 0$

2. $a > 0 \rightarrow \frac{1}{a} > 0$

$a < 0 \rightarrow \frac{1}{a} < 0$

3. $a, b, c \wedge d \varepsilon R$:

$$\begin{array}{l} a > b \\ c > d \\ \hline a+c > b+d \end{array}$$

4. $a, b, c \wedge d \varepsilon R^{+}$:

$$\begin{array}{l} a > b \\ c > d \\ \hline a.c > b.d \end{array}$$

5. $a, b \wedge c \varepsilon R^{+}$; o $a, b \wedge c \varepsilon R^{-}$

$a < b < c \rightarrow \frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

6. $\forall a, b \wedge c \varepsilon R, n \varepsilon Z^{+} /$

$a < b < c \rightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1} < c^{2n+1}$

7. $\forall a, b \wedge c \varepsilon R^{+}, n \varepsilon Z^{+}$

$a < b < c \rightarrow a^{2n} < b^{2n} < c^{2n}$

Propiedades de la desigualdad

1. $a < 0, c > 0 \wedge c^2 > a^2$

$a < b < c \rightarrow 0 \leq b^2 < c^2$

2. $a > 0 : a + \frac{1}{a} \geq 2$

3. $a<0: a+\dfrac{1}{a}\leq -2$

Propiedad adicional:

Para números reales positivos, tenemos:

MP = Media potencial
MA = Media aritmética
MG = Media geométrica
MH = Media Armónica

$$\boxed{MP \geq MA \geq MG \geq MH}$$

Para dos números: a ∧ b; $k \varepsilon Z^+$

$$\sqrt[k]{\frac{a^k+b^k}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$$

para tres números: a, b ∧ c; $k \varepsilon Z^+$

$$\sqrt[k]{\frac{a^k+b^k+c^k}{3}} \geq \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \geq \frac{3}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}$$

INTERVALOS

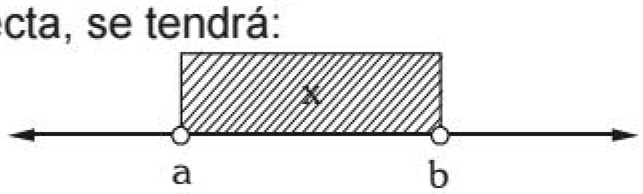
Se denomina intervalo al conjunto cuyos elementos son números reales, dichos elementos se encuentran contenidos entre dos números fijos denominados extremos, a veces los extremos forman parte del intervalo.

1. Intervalos acotados:

Son todos aquellos intervalos cuyos extremos son reales, estos pueden ser:

1.1. Intervalo abierto:

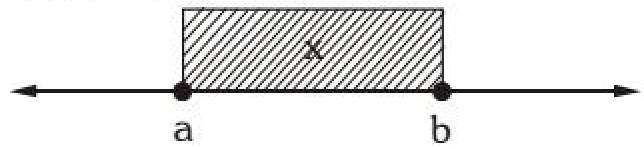
No considera a los extremos, se presenta por existencia de algún signo de relación simple.
En la recta, se tendrá:



Donde: $a<x<b \Leftrightarrow x\,\varepsilon <a;b>$
También: $x\,\varepsilon]a;b[$

1.2. Intervalo cerrado:

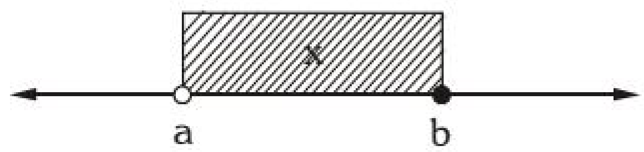
Se considera a los extremos, se presenta por existencia de algún signo de relación doble.
En la recta real, se tendrá:



Donde: $a\leq x\leq b \Leftrightarrow x\,\varepsilon [a;b]$
También: $x\,\varepsilon (a;b)$

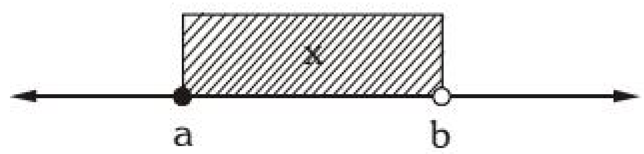
1.3. Intervalo mixto (semi abierto o semi cerrado):

Considera sólo a uno de sus extremos para:



$a<x\leq b \Leftrightarrow x\,\varepsilon <a;b]$

para:

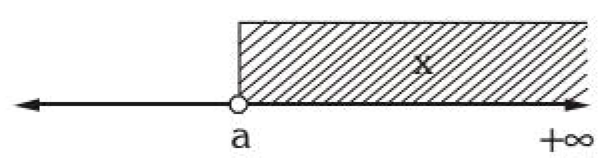


$a\leq x<b \Leftrightarrow x\,\varepsilon [a;b>$

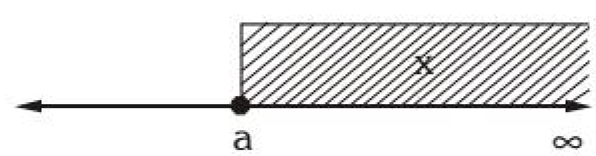
2. Intervalos no acotados:

Son todos aquellos donde al menos uno de los extremos no es un número real.

2.1. Intervalo acotado inferiormente:

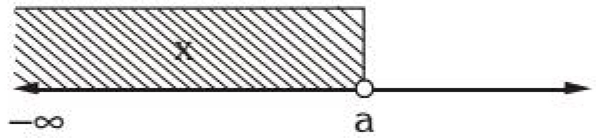


Donde: $a<x<\infty \Leftrightarrow x>a$
$x\,\varepsilon <a;\infty>$

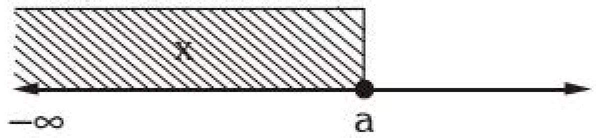


Donde: $a\leq x<\infty \Leftrightarrow x\geq a$
$x\,\varepsilon [a;\infty>$

2.2. Intervalo acotado superiormente:



Donde: $-\infty < x < a \Leftrightarrow x < a$
$x\,\varepsilon < -\infty; a >$



Donde: $-\infty < x \le a \Leftrightarrow x \le a$
$x\,\varepsilon < -\infty; a]$

Observaciones:

1. Un conjunto se dice que es acotado si y solo si es acotado superiormente e inferiormente a la vez.

2. Para el conjunto de los números reales R, se tiene: $R =]-\infty;\infty[\; = < -\infty;\infty >$
   Es evidente que $-\infty$ y ∞ no son números reales.

3. Como los intervalos son conjuntos, con ellos se podrán efectuar todas las operaciones existentes para conjuntos, tales como la unión, intersección, diferencia simétrica, etc.

Clases de desigualdad

1. Desigualdad absoluta:
Es aquella que mantiene el sentido de su signo de relación para todo valor de su variable. Vemos un ejemplo:
$* \; x^2 + 2x + 10 > 0 \; ; \; \forall x\,\varepsilon\, R$

2. Desigualdad relativa:
Es aquella que tiene el sentido de su signo de relación para determinados valores de su variable. Veamos un ejemplo:
$* \; 2x + 1 > x + 3 \rightarrow x > 2$

INECUACIONES

Se denomina inecuación a cualquier desigualdad relativa. Los valores de la variable que verifican la inecuación forman el conjunto solución, el cual se presenta en función de intervalos.

1.INECUACIONES RACIONALES:

1.1. Inecuaciones de primer grado (lineal)

$$\boxed{ax + b \gtrless 0}$$

$$a \wedge b\,\varepsilon R / a \ne 0$$

1.2. Inecuaciones de segundo grado (cuadrática)

$$\boxed{ax^2 + bx + c \gtrless 0}$$

$$a, b \wedge c\,\varepsilon R / a \ne 0$$

Propiedades

I. Trinomio siempre positivo
Si: $ax^2 + bx + c > 0; \forall x\,\varepsilon R$
entonces: $a > 0 \wedge b^2 - 4ac < 0$

II. Trinomio siempre negativo
Si: $ax^2 + bx + c < 0; \; \forall x\,\varepsilon R$
entonces: $a < 0 \wedge b^2 - 4ac < 0$

1.3. Inecuaciones de grado superior:

$$\boxed{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n \gtrless 0}$$

$$a_o, a_1, a_2, \ldots \wedge a_n \varepsilon R / a_o \ne 0$$
$$n\,\varepsilon N / n \ge 3$$

1.4. Inecuaciones fraccionarias:

$$\boxed{\frac{F(X)}{H(X)} \gtrless 0; [H]^0 \ge 1}$$

Resolución de la inecuación: Se recomienda utilizar el método de los puntos de corte cuya aplicación consiste en los siguientes pasos:

1. Se trasladan todos los términos al primer miembro, obteniendo siempre una expresión de coeficiente principal positivo.

2. Se factoriza totalmente a la expresión obtenida.

3. Se calculan los puntos de corte. Son los valores reales de "x" obtenidos al igualar cada factor primo a cero.

4. Se ubican, ordenadamente, todos los puntos en la recta real, dichos puntos originan en la recta dos o más zonas.

5. Se marcan las zonas obtenidas a partir de la derecha alternando los signos "+" y "-".

6. Si el signo de relación es > o $\geq$, el conjunto solución estará formado por todas las zonas positivas, pero si el signo de relación es < o $\leq$ el conjunto solución lo formarán todas las zonas negativas.

Ejemplo:
Resolver la inecuación:
$x^2+x>6$

Resolución: De acuerdo con el método de los puntos de corte, procedemos así:

$$x^2+x-6>0$$

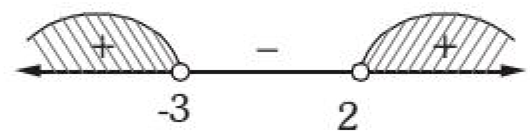
Factorizando: $(x+3)(x-2)>0$

Hallando puntos: $x=-3$; $x=2$

En la recta:

marcando zonas:

como el signo de relación es > la solución viene dada por todas las zonas positivas.



$$\therefore\ x\,\varepsilon < -\infty;-3> \cup <2;\infty>$$

Ejemplo:

Resolver: $\dfrac{9x+10}{x+2}<2$

Resolución: Procedemos de un modo similar que en el ejemplo anterior:

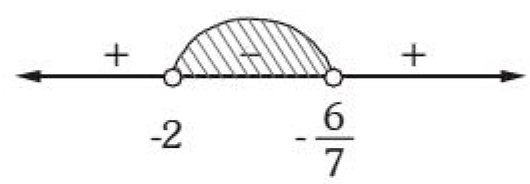
$\dfrac{9x+10}{x+2}-2<0$

$\dfrac{7x+6}{x+2}<0$

Puntos:

$7x+6=0 \rightarrow x=-\dfrac{6}{7}$

$x+2=0 \rightarrow x=-2$



$$\therefore\ x\,\varepsilon < -2;-\frac{6}{7}>$$

Observación: En una inecuación fraccionaria, si el signo de relación es doble, sólo cerraremos los extremos que provienen del numerador.

Ejemplo:

Resolver: $\dfrac{x^2-5}{x^2-x-12}\geq 1$

Resolución:

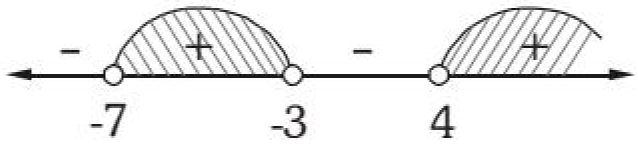
$\dfrac{x^2-5}{x^2-x-12}-1\geq 0$

$\dfrac{x+7}{x^2-x-12}\geq 0$

Observar que: $x^2-x-12\equiv(x-4)(x+3)$

$\dfrac{x+7}{(x-4)(x+3)}\geq 0$

Puntos: $\{-7,\ 4\ \wedge -3\}$



$\therefore\ x \,\varepsilon\, [-7;-3> \cup <4;\infty>$

2. INECUACIONES IRRACIONALES

2.1. Forma: $\sqrt[2n]{A} > B ; n \,\varepsilon\, Z^{+}$

se resuelve:

$$S_1 = (A \geq 0 \wedge B \geq 0 \wedge A > B^{2n})$$

$$S_2 = (A \geq 0 \wedge B < 0)$$

$$\boxed{CS = S_1 \cup S_2}$$

2.2. Forma: $\sqrt[2n]{A} < B ; n \,\varepsilon\, Z^{+}$

$$\boxed{CS = A \geq 0 \wedge B > 0 \wedge A < B^{2n}}$$

2.3. Forma: $\sqrt[2m]{A} \gtrless \sqrt[2n]{B} ;\ m \wedge n \,\varepsilon\, Z^{+}$

$$\boxed{CS = A \geq 0 \wedge B \geq 0 \wedge A^{2n} \gtrless B^{2m}}$$

Ejemplo:

Resolver: $\sqrt{x+1} > x-1$

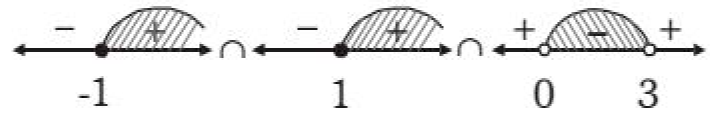
Resolución: De acuerdo con la forma (2.1), se plantea:

$S_1 :\ x+1 \geq 0 \wedge x-1 \geq 0 \wedge x+1 > (x-1)^2$

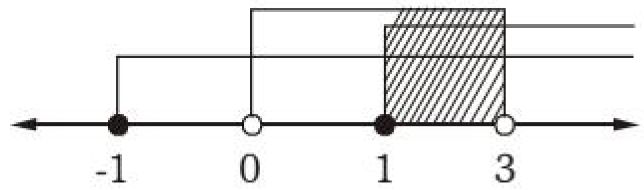
$x+1 \geq 0 \wedge x-1 \geq 0 \wedge -x^2+3x > 0$

$x+1 \geq 0 \wedge x-1 \geq 0 \wedge x^2-3x < 0$

$x+1 \geq 0 \wedge x-1 \geq 0 \wedge x(x-3) < 0$

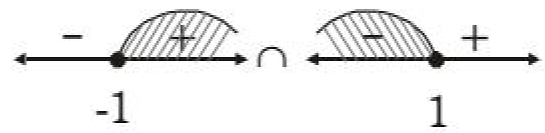


Intersectando:

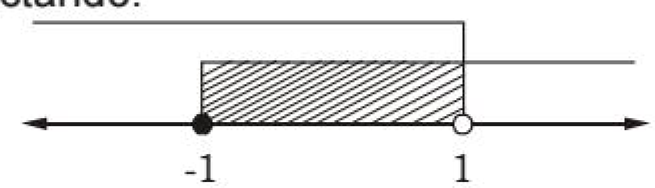


Observar que: $S_1 = [1;3>$

$S_2 : x+1 \geq 0 \wedge x-1 < 0$



Intersectando:



Observar que: $S_2 = [-1;1>$

Finalmente: $CS = S_1 \cup S_2$

$CS = S_1 \cup S_2$

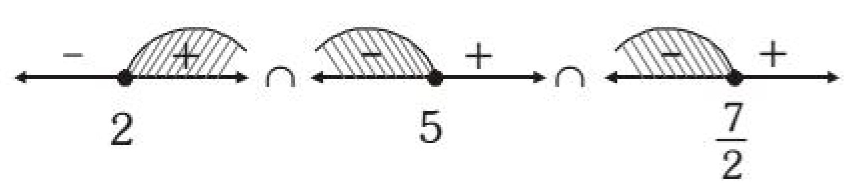
Ejemplo:

Resolver: $\sqrt{x-2} < \sqrt{5-x}$

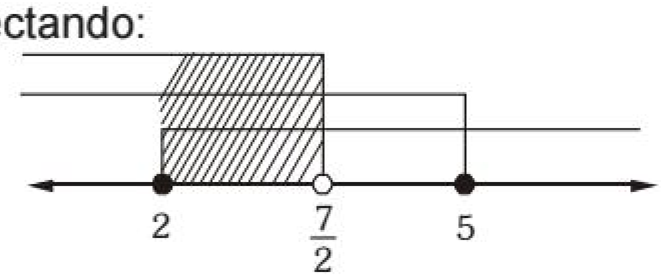
Re**Solución:** De acuerdo con la forma (2.3) se plantea:

$$x-2 \geq 0 \wedge 5-x \geq 0 \wedge x-2 < 5-x$$

$$x-2 \geq 0 \wedge x-5 \leq 0 \wedge 2x-7 < 0$$



Intersectando:



Álgebra

$\therefore \ CS = [2; \frac{7}{2}>$

VALOR ABSOLUTO (V.A.)

Dado el número real "x", la relación funcional denotada por |x| es el valor absoluto de "x", definido de la manera siguiente:

$$|x| = \begin{cases} x \ ; \ x > 0 \\ 0 \ ; \ x = 0 \\ -x \ ; \ x < 0 \end{cases}$$

Según la definición:
*|5|= 5 > 0
*|-7| = -(-7)-7 < 0
|-7| = 7

Teoremas:

1. $|x| \geq 0; \ \forall x \varepsilon R$
2. $|x| = |-x| \ ; \ \forall x \varepsilon R$
3. $|x.y| = |x|.|y| \ ; \ \forall x \wedge y \varepsilon R$
4. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}; \ x \wedge y \varepsilon R / y \neq 0$
5. $|x^2| = |x|^2 = x^2 \ ; \ \forall x \varepsilon R$
6. $-|x| \leq x \leq |x|; \ \ \forall x \varepsilon R$
7. $|x+y| \leq |x| + |y|; \ \ \forall x \wedge y \varepsilon R$

Propiedades:

1.Si: |x+y| = |x|+|y|,
entonces: $xy \geq 0$
2.Si: |x - y| = |x|+|y|,
entonces: $xy \leq 0$

Ecuaciones con valor absoluto:

$$\boxed{|x| = b; b > 0 \Leftrightarrow x = b \vee x = -b}$$

Ejemplo:

Resolver: |2x-1| = 7

Resolución: Observar que: b = 7 > 0. Luego, tenemos:

$2x - 1 = 7 \vee 2x - 1 = -7$

$2x = 8 \vee 2x = -6$

$x = 4 \vee x = -3$

$\therefore \ CS = \{4; -3\}$

Ejemplo:

Resolver: |5x - 1| = 2 - x

Resolución: Se plantea lo siguiente:

$2 - x > 0 \wedge (5x - 1 = 2 \vee 5x - 1 = x - 2)$

$x - 2 < 0 \wedge (6x = 3 \wedge 4x = -1)$

$x < 2 \wedge (x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{4})$

Observar que: $x = \frac{1}{2}$ verifica x < 2.
$x = -\frac{1}{4}$ verifica x < 2.
$\therefore \ CS = \{\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\}$

INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

1. $|x| > b \Leftrightarrow x > b \vee x < -b$
2. $|x| < b \Leftrightarrow b > 0 \wedge (-b < x < b)$
3. $|x| \lesseqgtr |y| \Leftrightarrow (x+y)(x-y) \lesseqgtr 0$

Ejemplo:

Resolver: |3x + 4| < 5

Resolución: De acuerdo con la forma (2), se plantea:

$$\underbrace{5 > 0}_{R} \wedge (-5 < 3x + 4 < 5)$$
¿ ? porque es una verdad

Luego, sólo se resuelve:
-5 < 3x + 4 < 5
-5 - 4 < 3x < 5 - 4
-9 < 3x < 1
$-3 < x < \frac{1}{3}$

Álgebra

Capítulo XV:

Relaciones y Funciones

RELACIONES

1.Definiciones Previas

1.1. Par ordenado:

Es un conjunto de dos elementos considerados en un determinado orden. Si los elementos del par ordenado son "a" y "b", al conjunto se le denota por (a; b) y se define de la manera siguiente:

$$\boxed{(a;b)=\{\{a\};\{a;b\}\}}$$

Donde:
a = primera componente del par
b = segunda componente del par

Propiedades:

I.(a; b) $\neq$ (b; a); $\forall a \neq b$
II.(a; b) = (c; d) $\rightarrow$ a = c ^ b = d

1.2. Producto Cartesiano:

Dados los conjuntos no vacíos A y B, el producto cartesiano de A por B (en ese orden), se denota así $A\times B$ y se define de la siguiente manera:

$$\boxed{AxB=\{(a;b)\,/\,a\varepsilon A \wedge b\varepsilon B\}}$$

Donde:
A = conjunto de partida
B = conjunto de llegada

Ejemplo: Dados los conjuntos:
A = {1; 2; 3} ^ B = {-1; 2}

Determinar: $A\times B \wedge B\times A$

Resolución:
Para , $A\times B$, tenemos:
$A\times B=\{1;\ 2;\ 3\}\wedge\{-1;2\}$

$A\times B$ = {(1; -1), (1; 2), (2; -1), (2; 2), (3; -1), (3; 2)}

Para $B\times A$, tenemos:
$B\times A=\{-1;\ 2\}\wedge\{1;\ 2;\ 3\}$

$B\times A$ = {(-1; 2), (-1; 2), (-1; 3), (2; 1), (2; 2), (2; 3)}

Propiedades:

I. El producto cartesiano no es conmutativo:

$$\boxed{AxB \neq BxA}$$

II. El número de elementos $A\times B$ es igual al número de elementos de $B\times A$ y se obtiene según la fórmula:

$$\boxed{n(AxB)=n(BxA)=n(A).n(B)}$$

2.Relación Binaria

2.1. Definición:

Dados dos conjuntos no vacíos A y B, se dice que R es una relación de A en B (en ese orden), si y sólo si, R es un subconjunto de $A\times B$, es decir: $R\subset A\times B$

$$\boxed{R=\{(a;b)\,/\,a\varepsilon B \wedge b\varepsilon B \wedge aRb\}}$$

Donde:
a R b, indica la relación que existe entre los componentes "a" y "b".

Ejemplo: Dados los conjuntos:

A = {1; 2; 4} ^ B = {2; 3}

Determinar la relación de R de A en B definida de la manera siguiente:

$R = \{(a;b)/a\varepsilon A \wedge b\varepsilon B \wedge a < b\}$

Resolución:
Hallar el producto cartesiano de A por B.
$A\times B$ = {1; 2; 4} {2; 3}
$A\times B$ = {(1; 2), (1; 3), (2; 2), (2; 3), (4; 2), (4; 3)}
observar que los elementos de R son todos los pares (a; b) $\varepsilon A\times B/a < b$. Luego, tenemos:
R = {(1; 2), (1; 3), (2; 3)}

2.2. Relación en A:
Dado el conjunto no vacío A, se dice que R es una relación en A, si y solamente si, $R \subset A\times A$.

2.3.Clases de Relación:
Sea R una relación en A ($R \subset A\times B$), luego R podrá ser:

I. Reflexiva
$\forall a\varepsilon A \rightarrow (a;a)\varepsilon R$

II. Simétrica
$(a;b)\varepsilon R \rightarrow (b;a)\varepsilon R$

III. Transitiva
$(a;b)\varepsilon R \wedge (b;c)\varepsilon R \rightarrow (a;c)\varepsilon R$

IV. De equivalencia
Siempre y cuando sea a la vez reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplo: Dado el conjunto
A = {1; 2; 3}

Se define una relación en A de la manera siguiente:
R = {(1; 1), (1; 2), (2; 2), (3; 3), (2; 1)}

¿R es una relación de equivalencia?

Resolución:
Si R es una relación de equivalencia, deberá ser reflexiva, simétrica y transitiva a la vez.

Reflexiva $\forall a\varepsilon R \rightarrow (a;a)\varepsilon R$
1 ε A → (1; 1) εR ¡Correcto!
2 εA → (2; 2) εR ¡Correcto!
3 ε A → (3; 3) εR ¡Correcto!

Evidentemente, R es reflexiva.

Simétrica $(a;b)\varepsilon R \rightarrow (b;a)\varepsilon R$
$(1;2)\varepsilon R \rightarrow (2;1)\varepsilon R$ → ¡Correcto!

Evidentemente, R es simétrica.

Transitiva $(a;b)\varepsilon R \wedge (b;c)\varepsilon R \rightarrow (a;c)\varepsilon R$
$(1;1)\varepsilon R \wedge (1;2)\varepsilon R \rightarrow (1;2)\varepsilon R$ ¡Correcto!
$(1;2)\varepsilon R \wedge (2;2)\varepsilon R \rightarrow (1;2)\varepsilon R$ ¡Correcto!
$(1;2)\varepsilon R \wedge (2;1)\varepsilon R \rightarrow (1;1)\varepsilon R$ ¡Correcto!

Evidentemente, R es transitiva.
∴ R es una relación de equivalencia.

FUNCIONES

1.Definición:

Dada una relación F de A en B $(F \subset A\times B)$, se dice que F es una función de A en B si y sólo si para cada $x\varepsilon A$ existe a lo más un elemento $y\varepsilon B$, tal que el par $(x;y)\varepsilon F$, es decir, que dos pares ordenados distintos no pueden tener la misma primera componente.

Ejemplo:
¿Cuál o cuáles de las siguientes relaciones,
$R_1 = \{(2;1),(0;3),(-1;7)\}$

$R_2 = \{(3;0),(4;0),(5;1)\}$

$R_3 = \{(5;1),(4;-1),(4;2)\}$

son funciones?

Resolución:
De acuerdo con la definición, se observa que:
R_1 es función
R_2 es función
R_3 no es función, ¿por qué?

Porque $(4;-1)\varepsilon R_3 \wedge (4;2)\varepsilon R_3$, siendo pares ordenados distintos.

1.1.Propiedad

Siendo F una función, se verifica lo siguiente:

$$(x;y)\varepsilon F \wedge (X;Z)\varepsilon F \rightarrow y = z$$

2.Dominio y Rango de una función F

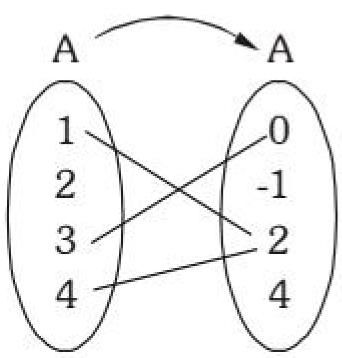
2.1.Dominio de F = Dom(F)

(D_F) denominado también pre imagen, es el conjunto de los primeros elementos de la correspondencia que pertenece al conjunto de partida.

2.2.Rango de F = Ran(F)

(R_F) denominado también imagen, recorrido o contra dominio, es el conjunto de segundos elementos de la correspondencia que pertenece al conjunto de llegada.

Ejemplo: Dada la relación funcional representada por el diagrama digital.



Determinar la función, indicando su dominio y rango.

Resolución:

Del diagrama, se tiene:

$$F = \{(1; 2), (3; 0), (4; 2)\}$$

De donde es evidente que:

$$D_F = \{1; 3; 4\} \wedge R_F = \{2; 0\}$$

2.3.Propiedad:

Sea F una función de A en B, luego se denota por: $F : A \rightarrow B$ y se cumple lo siguiente:

$$D_F \subset A \wedge R_F \subset B$$

3.Aplicación

3.1.Definición

Dada una función F de A en B, $F : A \rightarrow B$. Se dice que F es una aplicación, si y sólo si, su dominio es igual al conjunto de partida.

$$F \text{ es aplicacion} \leftrightarrow D_F = A$$

FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

Dada una función F de A en B, $F : A \rightarrow B$, si A y B son subconjuntos de los números reales R, se afirmará que F es una función real de variable real.

$$F : A \rightarrow B, A \subset R \wedge B \subset R$$

Debido a ello, F tendrá una representación gráfica en el plano cartesiano (x.y), la cual viene dada por un conjunto de puntos generados al establecer la relación de correspondencia entre la variable independiente "x" y su imagen la variable dependiente "y", es decir:

$$F = \left\{(x;y)\varepsilon R^2 / x\varepsilon D_F \wedge y = F(x)\right\}$$

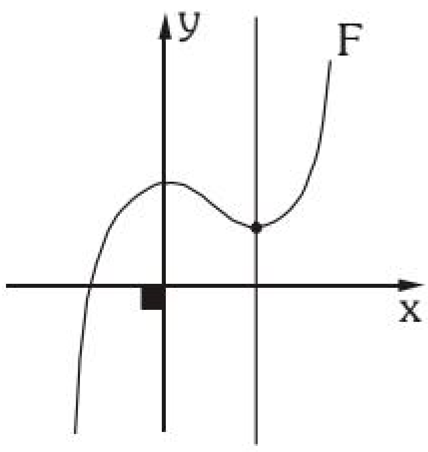
la igualdad mostrada: y = F(x) expresa la regla de correspondencia de la función real F.

1.1.Teorema

Toda recta vertical, trazada a la gráfica de una función, la corta sólo en un punto.

Álgebra

Fig. (1)



F corresponde a la gráfica de una función.

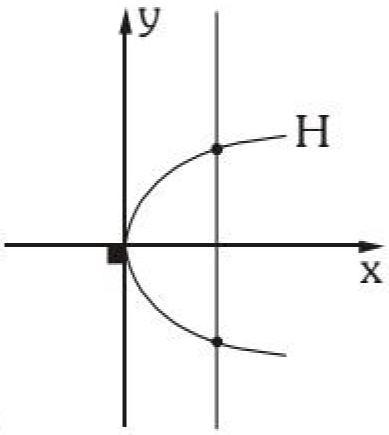


Fig. (2)

H no corresponde a la gráfica de una función.

1.2.Criterios para determinar el dominio y el rango

I.Para el Dominio:
Se despeja la variable "y", para luego analizar la existencia de su equivalente.

II.Para el Rango:
Se despeja la variable "x", para luego analizar la existencia de su equivalente.

A veces, el rango se determina a partir del dominio.

Observación: Frecuentemente, para determinar dominios y rangos es necesario reconocer la existencia de las expresiones dadas dentro del conjunto de los números reales, así pues, tenemos:

Ejemplo:

Determinar el dominio y el rango de la función F, donde:

* $\frac{A}{B} \varepsilon R \leftrightarrow B \neq 0$
* $\frac{A}{B} \varepsilon R \leftrightarrow B \neq 0$

Ejemplo:

Determinar el dominio y el rango de la función F, donde:

$$F : R \rightarrow R / y = F(x) = \frac{2x+1}{x-3}$$

Resolución:

De acuerdo con los criterios para el dominio:

$$y = \frac{2x+1}{x-3}$$

$$y \varepsilon R \leftrightarrow x - 3 \neq 0$$

$$x \neq 3$$

$$x \varepsilon R - \{3\}$$

$$\therefore D_F = R - \{3\}$$

para el rango:

$$y = \frac{2x+1}{x-3}$$

xy - 3y = 2x + 1
xy - 2x = 3y + 1
(y - 2)x = 3y + 1

$$x = \frac{3y+1}{y-2}$$

$$x \varepsilon R \leftrightarrow y - 2 \neq 0$$

$$y \neq 2$$

$$y \varepsilon R - \{2\}$$

$$\therefore R_F = R - \{2\}$$

Ejemplo:

Determinar el rango de la función, la cual viene dada por:

$$F = R \rightarrow R / y = F(x) = 2x - 3 ; x \varepsilon < 5;10]$$

Resolución:

Observar que el rango se puede encontrar a partir del dominio, pues con $x \varepsilon < 5;10]$ bastará determinar la extensión de: y = 2x - 3. Veamos:
Por condición: $x \varepsilon < 5;10]$
de donde tenemos: $5 < x \le 10$
multiplicando por 2 $10 < 2x \le 20$
sumando -3 $7 < 2x - 3 \le 17$
$7 < y \le 17$
$y \varepsilon < 7;17]$
observar que: $\therefore R_F = < 7;17]$

2.Igualdad de Funciones

2.1.Definición
Dadas las funciones F y G, tal que:
$F : R \to R / y = F(x)$
$G : R \to R / y = G(x)$

se dice que éstas son iguales: F = G, si y solo si verifican simultáneamente las condiciones:

I. $D_F = D_G$
II. $F(x) = G(x);\ \forall x \varepsilon D_F = D_G$

Ejemplo:

Dadas las funciones:
$F : R \to R / y = F(x) = \frac{x}{x^2}$
$G : R \to R / y = G(x) = \frac{1}{x}$
¿son iguales?

Resolución:

De acuerdo con la definición, veamos si se verifican las condiciones:

I.Para F: $y = \frac{x}{x^2}$
$y \varepsilon R \leftrightarrow x^2 \ne 0$
$x \ne 0 \to x \varepsilon R - \{0\}$
$\therefore D_F = R - \{0\}$

II.Para G: $y = \frac{1}{x}$
$y \varepsilon R \leftrightarrow x \ne 0$
$x \ne 0 \to x \varepsilon R - \{0\}$
$\therefore D_G = R - \{0\}$
Observar que: $D_F = D_G$.

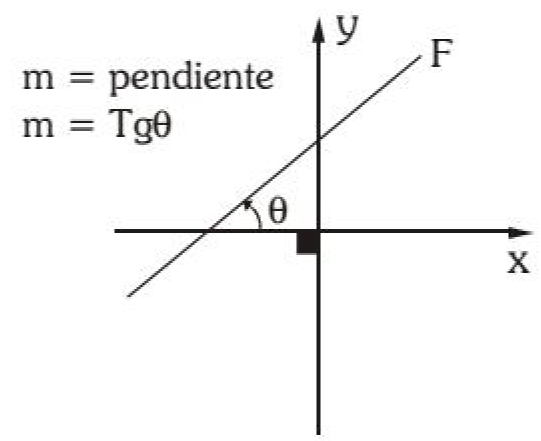
II.Regla de correspondencia para F.
$F : y = F(x) = \frac{x}{x^2}$

como $x \ne 0$: $F(x) = \frac{1}{x}$
Regla de correspondencia para G.
$G : y = G(x) = \frac{1}{x}$
Observar que: F(x) = G(x).
$\therefore F \wedge G$ son iguales

1.FUNCIONES ESPECIALES

1.1. Función Lineal

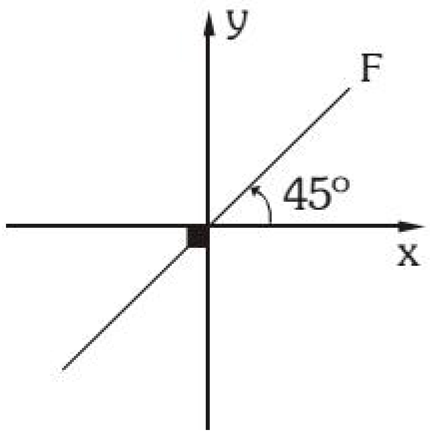
$$\boxed{F : y = F(x) = mx + b}$$



$$D_F = R \wedge F_F = R$$

1.2. Función Identidad

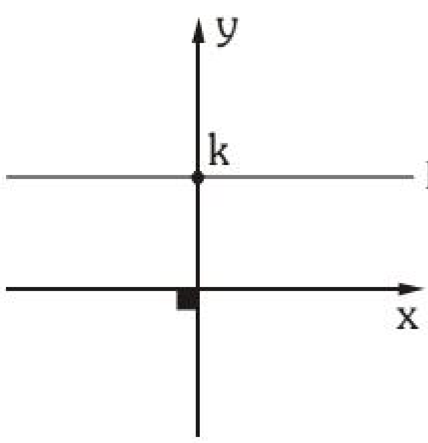
$$\boxed{F : y = F(x) = x}$$



$$D_F = R \wedge F_F = R$$

1.3. Función Constante

$$\boxed{F : y = F(x) = k; k\varepsilon R}$$

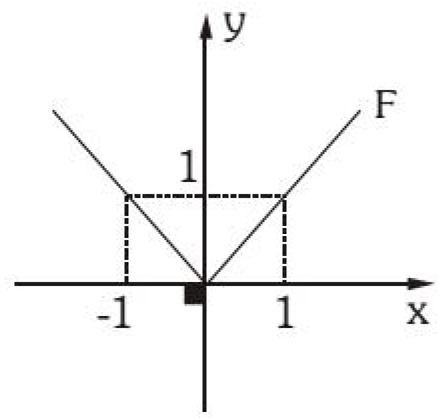


$$D_F = R \wedge R_F = \{k\}$$

1.4. Función Valor Absoluto

$$\boxed{F : y = F(x) = |x|}$$

$$y = |x| = \begin{cases} x; & x > 0 \\ 0; & x = 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$$

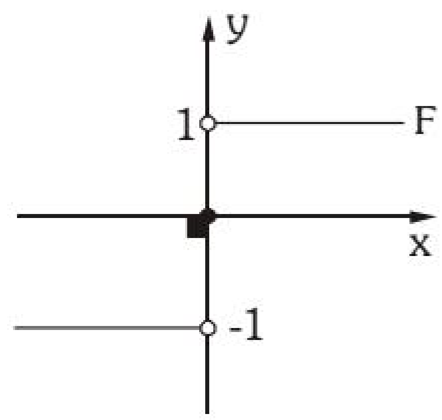


$$D_F = R \wedge R_F = [0; \infty >$$

1.5. Función Signo

$$\boxed{F : y = F(x) = Sgn(x)}$$

$$y = Sgn(x) = \begin{cases} -1; x < 0 \\ 0; x = 0 \\ 1; x > 0 \end{cases}$$

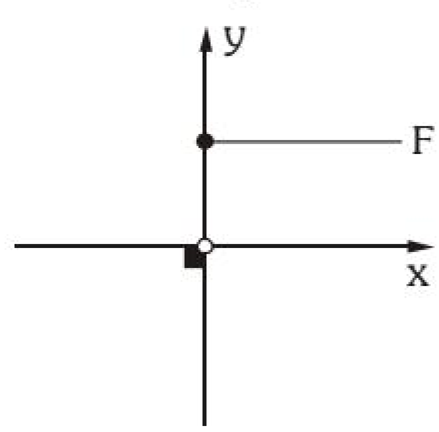


$$D_F = R \wedge R_F = \{-1, 0, 1\}$$

1.6. Función Escalón Unitario

$$\boxed{F : y = F(x) = u(x)}$$

$$y = u(x) = \begin{cases} 0; \ x < 0 \\ 1; \ x \geq 0 \end{cases}$$



$$D_F = R \wedge R_F = \{0; 1\}$$

1.7. Función Máximo Entero

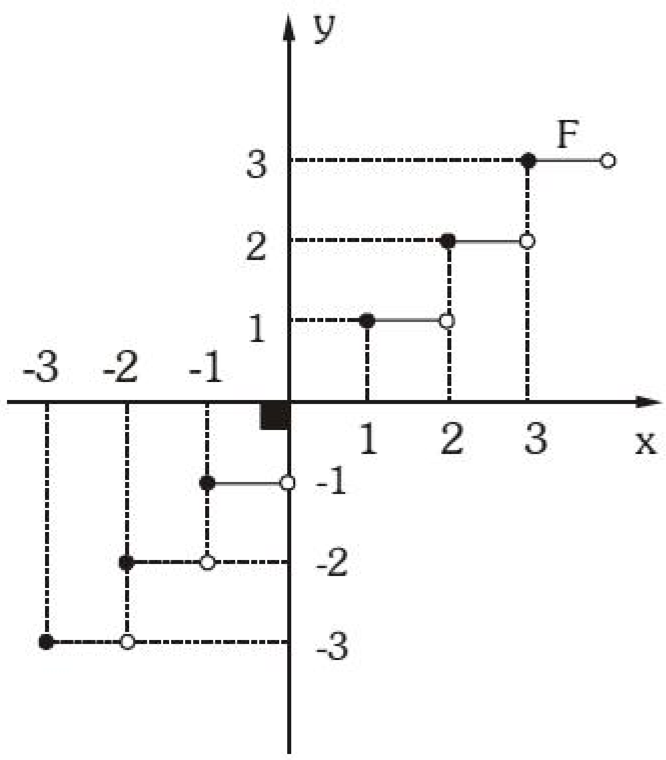
$$F: y = F(x) = [\![x]\!]$$

Dado el número real "x", el máximo entero de "x" es la relación funcional denotada por $[\![x]\!]$ y definida como el mayor entero menor o igual que "x", veamos algunos ejemplos:

* $[\![3;15]\!] = 3$ ¿por qué? Porque $3 \leq 3;15$
* $[\![4]\!] = 4$ ¿por qué? Por que $4 \leq 4$

Teorema:

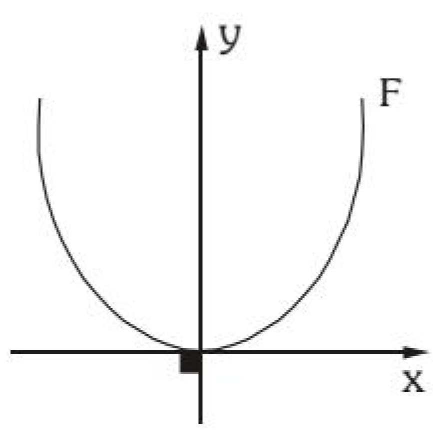
$$[\![x]\!] = y \leftrightarrow y \leq x < y + 1; y \varepsilon Z$$



$$D_F = R \wedge R_F = R$$

1.8. Función Cuadrática Simple:

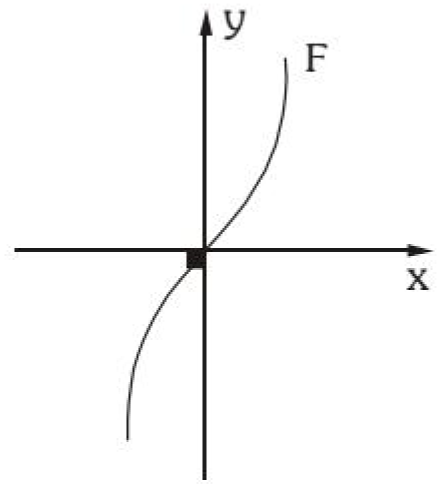
$$F: y = F(x) = x^2$$



$$D_F = R \wedge R_F = [0; \infty >$$

1.9. Función Cúbica Simple:

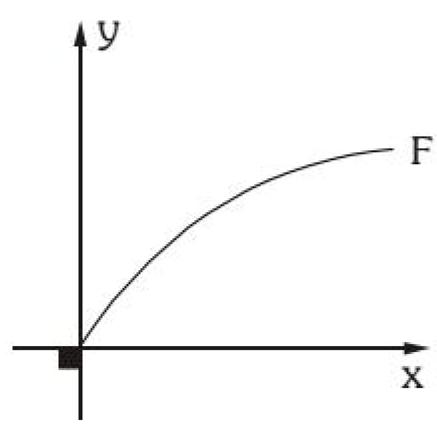
$$F: y = F(x) = x^3$$



$$D_F = R \wedge R_F = R$$

1.10. Función Raíz Cuadrada:

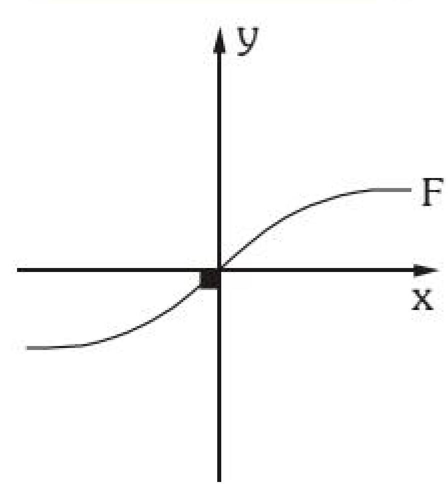
$$F: y = F(x) = \sqrt{x}$$



$$D_F = [0; \infty > \wedge R_F = [0; \infty >$$

1.11. Función Raíz Cúbica

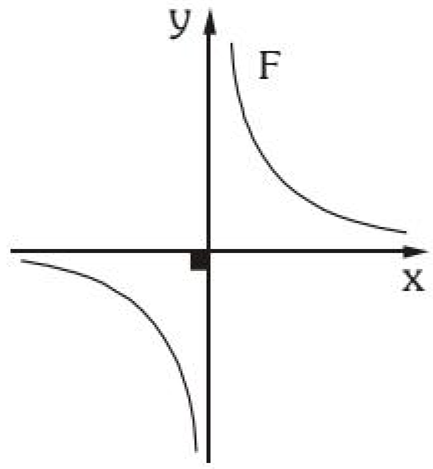
$$F: y = F(x) = \sqrt[3]{x}$$



$$D_F = R \wedge R_F = R$$

1.12. Función Inverso Multiplicativo

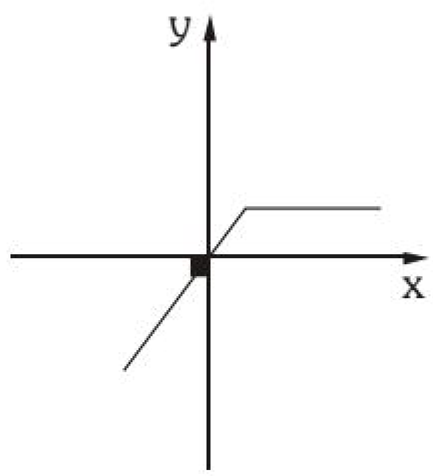
$$\boxed{F: y = F(x) = \frac{1}{x}}$$



$$D_F = R - \{0\} \wedge R_F = R - \{0\}$$

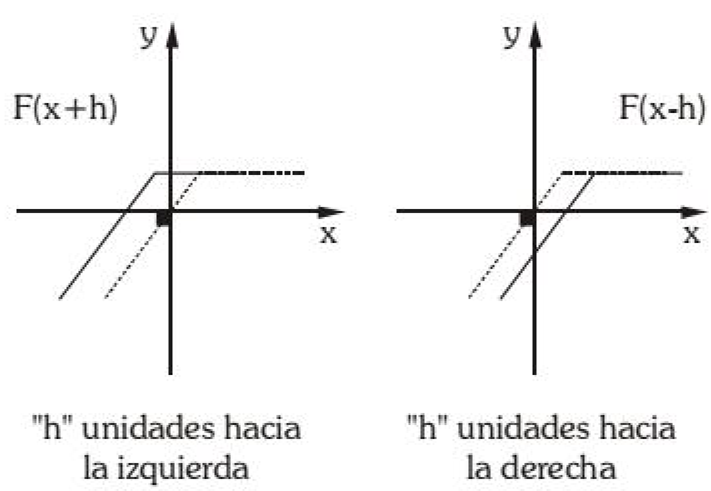
2. DESPLAZAMIENTOS Y GIROS DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Conociendo la gráfica de la función F, donde:
F: y = F(x)

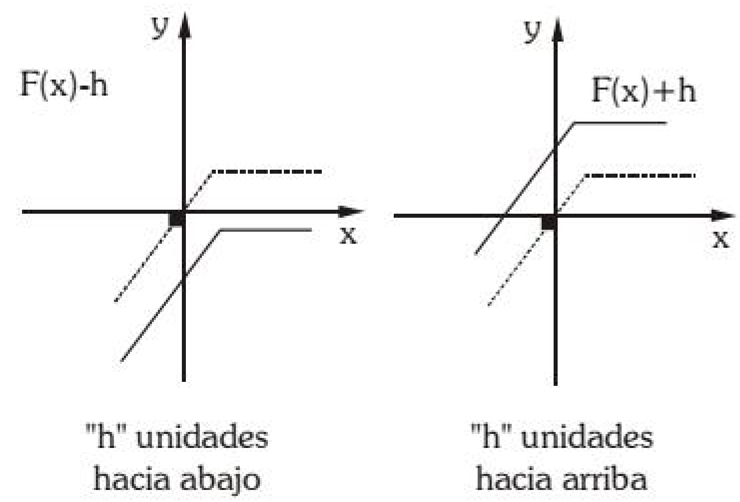


y considerando un número positivo "h", tenemos:

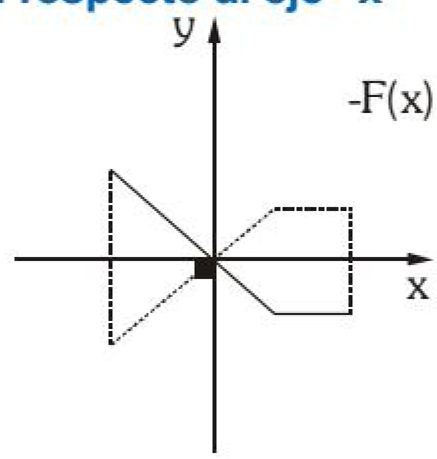
2.1.Desplazamiento Horizontal



2.2.Desplazamiento Vertical

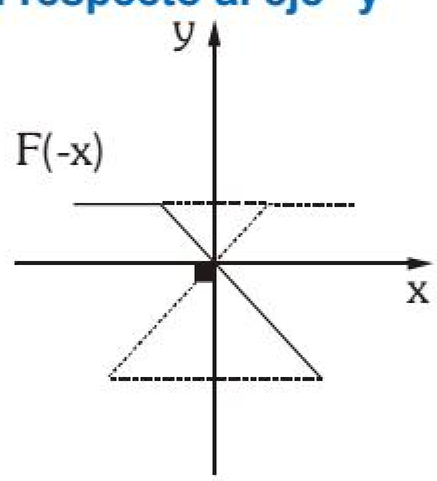


2.3.Giro con respecto al eje "x"



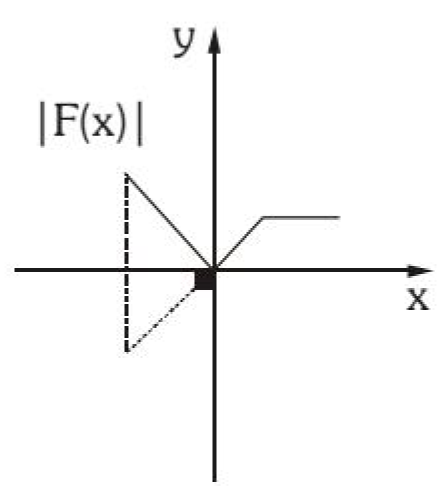
El eje "x" se comporta como si fuese un espejo.

2.4.Giro con respecto al eje "y"



El eje "y" se comporta como si fuese un espejo.

2.5.Giro producido por el valor absoluto



Álgebra

Capítulo XVI: Logaritmos

FUNCIÓN EXPONENCIAL

Siendo "b" un número positivo distinto de la unidad.

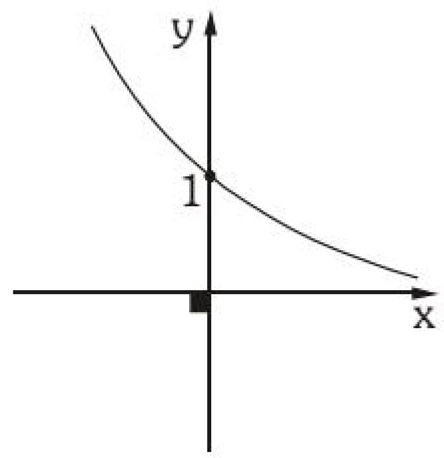
$$F : R \rightarrow R \,/\, y = F(X) = \exp_b(X) = b^x$$

Donde:

$$D_F = R \wedge R_F = < 0 ; \infty >$$

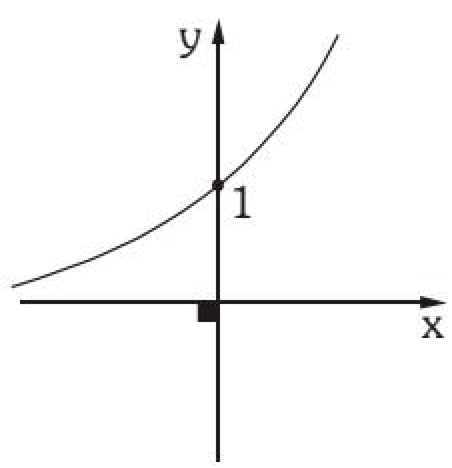
Análisis de la gráfica:

1. $F : y = F(x) = \text{Log}_b x ;\ 0 < b < 1$



La función es decreciente.

2. $F : y = F(x) = b^x ;\ b > 1$



La función es creciente.

Observación: La función exponencial es monótona e inyectiva, por lo último se afirma que dicha función admite inversa.

Función logarítmica

Siendo "b" un número positivo distinto de la unidad.

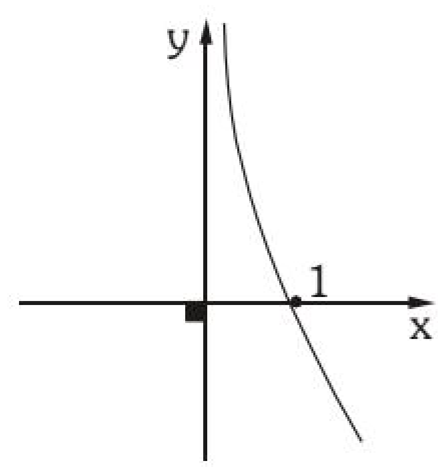
$$F : R \rightarrow R \,/\, y = F(X)\text{Log}_b x$$

Donde:

$D_F = < 0 ; \infty > \wedge R_F = R$

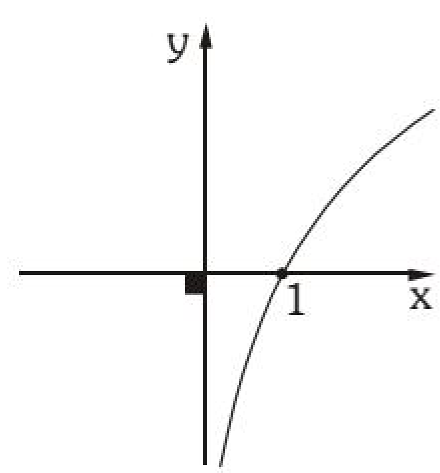
Análisis de la gráfica

1. $F : y = F(x) = \text{Log}_b x ;\ 0 < b < 1$



La función es decreciente.

2. $F : y = F(x) = \text{Log}_b x ; b > 1$



La función es creciente.

Observación: La función logarítmica es la inversa de la función exponencial y viceversa.

Logaritmo (Log)

Se define logaritmo de un número "N" en una base "b" positiva y distinta de la unidad, como el exponente "α" que debe afectar a dicha base, para obtener una potencia igual al número dado inicialmente.

Representación:

$$\text{Log}_b N = \alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Donde:

Log = Operador de la logaritmación
N = Número propuesto / N > 0
b = Base del logaritmo / b > 0; b $\neq$ 1
α = Logaritmo / $\alpha \in$ R.

Definición:

$$b^{\alpha} = N \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

* $\text{Log}_2 8 = x \Leftrightarrow 2^x = 8$
  $\therefore x = 3$
* $\text{Log}_5 x = 2 \Leftrightarrow 5^2 = x$
  $\therefore x = 25$

Teorema: Reemplazando (1) en (2).

$$\boxed{b^{\text{Log}_b N} = N}$$

* $5^{\text{Log}_5 3} = 3$
* $12^{\text{Log}_{12}(x-4)} = 5 \Leftrightarrow x - 4 = 5$
  $\therefore x = 9$

Propiedades generales:

1. $\forall b > 0;\ b \neq 1$
$\text{Log}_b 1 = 0$

2. $\forall b > 0;\ b \neq 1$
$\text{Log}_b b = 1$

Observación: En R no existe el logaritmo para números negativos.

* $\text{Log}_7(-10)$ ¡No existe en R!

Propiedades operativas:

1. $\forall M, N > 0;\ \forall b > 0; b \neq 1$

$$\boxed{\text{Log}_b M + \text{Log}_b N = \text{Log}_b (M.N)}$$

2. $\forall M, N > 0;\ \forall b > 0; b \neq 1$

$$\boxed{\text{Log}_b M - \text{Log}_b N = \text{Log}_b \left(\frac{M}{N}\right)}$$

3. $\forall M > 0;\ \forall n \in R; \forall b > 0; b \neq 1$

$$\boxed{\text{Log}_b M^n = n.\text{Log}_b M}$$

4. $\forall M > 0;\ \forall n \in R - \{0\}; \forall b > 0; b \neq 1$

$$\boxed{\text{Log}_b M = \text{Log}_{b^n} M^n}$$

Casos especiales:

1. $\forall b > 0; b \neq 1; \{m, n\} \subset R - \{0\}$

$$\text{Log}_{(b^n)}(b^m) = \frac{m}{n}$$

2. $\forall b > 0; b \neq 1; \{m, n\} \subset R^+$

$$\text{Log}_{(\sqrt[n]{b})}(\sqrt[m]{b}) = \frac{n}{m}$$

3. $\forall b > 0; b \neq 1; n \in R$

$$n = \text{Log}_b b^n$$

Sistema de logaritmos

Un sistema de logaritmos se genera al asumir el parámetro "b" un valor determinado, como: b > 0; b ≠ 1, es fácil apreciar que existen infinitos sistemas de logaritmos, siendo los usuales los siguientes:

1.Sistema de logaritmos naturales:

También llamado sistema de logaritmos neperianos o hiperbólicos. Aquí, la base es el número inconmensurable "e" cuyo valor aproximado es: 2,7182.

$$\boxed{\mathrm{Log}_e N = \mathrm{Ln}N; N > 0}$$

2.Sistema de logaritmos decimales:

También llamado sistema de logaritmos vulgares o Briggs, aquí la base es el número 10.

$$\boxed{\mathrm{Log}_{10} N = \mathrm{Log}N; N > 0}$$

Conversión de Sistemas:

1.De logaritmo natural a decimal

$$\boxed{\mathrm{Log}N = 0{,}4343.\mathrm{Ln}N; N > 0}$$

2.De logaritmo decimal a natural

$$\boxed{\mathrm{Ln}\ N = 2{,}3026.\mathrm{Log}N > 0}$$

Cambio de base

Dado un logaritmo en base "b", se le podrá representar en base "m", según la relación.

$$\boxed{\mathrm{Log}_{\,b} N = \frac{\mathrm{Log}_{\,m} N}{\mathrm{Log}_{\,m} b}}$$

Donde: $N > 0 \wedge \{m, b\} \subset R^+ - \{1\}$

* $\mathrm{Log}_3 12$ en base 5, será:

$$\mathrm{Log}_3 12 = \frac{\mathrm{Log}_5 12}{\mathrm{Log}_5 3}$$

Caso especial: $\forall \{a, b\} \subset R^+ - \{1\}$

$$\boxed{\mathrm{Log}_b a = \frac{1}{\mathrm{Log}_a b}}$$

* $\mathrm{Log}_7 18 = \dfrac{1}{\mathrm{Log}_{18} 7}$

Regla de la cadena:

Verificando la existencia de cada uno de los factores en el conjunto R, se cumple:

$$\boxed{\mathrm{Log}_b\ \cancel{a}.\cancel{\mathrm{Log}_a}\ \cancel{c}.\cancel{\mathrm{Log}_c}\ \cancel{d}.\cancel{\mathrm{Log}_d}e = \mathrm{Log}_b e}$$

* $\mathrm{Log}_2 5.\mathrm{Log}_5 7.\mathrm{Log}_7 8 = \mathrm{Log}_2 8$

$= \mathrm{Log}_2 2^3 = 3\mathrm{Log}_2 2$

$= 3.1 = 3$

Propiedad adicional:

$\forall a, b, c\ \varepsilon R^+ / b \neq 1$

$$\boxed{a^{\mathrm{Log}_b c} = c^{\mathrm{Log}_b a}}$$

* $5^{\mathrm{Log}_7 12} = 12^{\mathrm{Log}_7 5}$

Ecuaciones logarítimicas

Analizaremos cada uno de los casos frecuentes, veamos:

Primer caso: $\mathrm{Log}_b x = a$

se cumple: $x > 0 \wedge b > 0;\ b \neq 1$

Álgebra

se plantea: $b^a = x$

Segundo caso: $\mathrm{Log}_b x = \mathrm{Log}_b y$

se cumple: $x > 0 \wedge y > 0 \wedge b > 0; b \neq 1$

se plantea: x = y

Tercer caso: $b^x = a$

se cumple: $a > 0 \ \wedge \ b > 0$

se plantea: $\mathrm{Log}_b b^x = \mathrm{Log}_b a$

$x . \mathrm{Log}_b b = \mathrm{Log}_b a$

$\therefore \ x = \mathrm{Log}_b a$

Inecuaciones exponentes

Analizaremos cada uno de los casos existentes, veamos:

Primer caso: Siendo, 0 < b < 1.

$b^x < b^y \Rightarrow x > y$

$b^x > b^y \Rightarrow x < y$

Segundo caso: Siendo, b > 1.

$b^x < b^y \Rightarrow x < y$

$b^x > b^y \Rightarrow x > y$

Inecuaciones logarítmicas

Analizaremos cada uno de los casos existentes, veamos:

Primer caso:

Siendo, 0 < b < 1 ^ x > 0 ^ y > 0

$\mathrm{Log}_b x < \mathrm{Log}_b y \ \Rightarrow \ x > y$

$\mathrm{Log}_b x > \mathrm{Log}_b y \ \Rightarrow \ x < y$

Segundo caso:

Siendo, $b > 1 \wedge x > 0 \wedge y > 0$

$\mathrm{Log}_b x < \mathrm{Log}_b y \ \Rightarrow x < y$

$\mathrm{Log}_b x > \mathrm{Log}_b y \ \Rightarrow x > y$

Cologaritmo (Colog)

Teniendo en cuenta que:

$N > 0 \wedge b > 0$, $b \neq 1$

Se define el cologaritmo del número "N" en la base "b", de la manera siguiente:

$$\boxed{\mathrm{Colog}_b N = -\mathrm{Log}_b N = \mathrm{Log}_b \left(\frac{1}{N}\right)}$$

* $\mathrm{Co\,log}_{125} 25 = -\mathrm{Log}_{125} 25$

$= -\mathrm{Log}_{(5^3)} (5^2)$

$= -\dfrac{2}{3}$

Antilogaritmo (Antilog)

También llamado exponencial, considerando que: $N \varepsilon R \wedge b > 0 \ b \neq 1$, se define el logaritmo del número "N" en la base "b", de la manera siguiente:

$$\boxed{\mathrm{Antilog}_b N = \exp_b N = b^N}$$

* $\mathrm{Antilog}_2 4 = 2^4 = 16$
* $\exp_3(-2) = 3^{-2} = \dfrac{1}{9}$

Relación entre Operadores:

Teniendo en cuenta que {x; b} $\subset R^+ / b \neq 1$; se cumple:

1. $\mathrm{Antilog}_b(\mathrm{Log}_b x) = x$
2. $\mathrm{Antilog}_b(\mathrm{Colog}_b x) = x^{-1}$
3. $\mathrm{Log}_b(\mathrm{Antilog}_b x) = x$
4. $\mathrm{Log}_b(\mathrm{Antilog}_b x) = x$

Progresión aritmética (P.A.)

Es aquella sucesión ordenada en la que cada término, excepto el primero, es igual al término anterior aumentado en un valor constante llamado razón de la progresión.

Representación de una P.A.

$\div\, a_1 . a_2 . a_3 . \;\ldots\ldots\; . a_n$

$\div\, a_1 . a_1 + r . a_1 + 2r . \;\ldots\ldots\; . a_1 + (n-1) r$

Donde:

$\div$ = Inicio de la P.A.

. = Separación de términos a_1 = Primer término

a_n = Término n-ésimo

n = número de términos

r = razón de la P.A.

Clases de P.A.

1.Si: r > 0, la P.A. es creciente.

2.Si: r < 0, la P.A. es decreciente.

Observación:

Si, r = 0, se dice que la progresión aritmética es trivial.

Propiedades de una P.A.

Dada la siguiente progresión aritmética,

$\div\, a_1 . a_2 . a_3 . \;\ldots\ldots\; . a_{n-1} - a_n$

se cumple:

1.Razón (r)

$$\boxed{r = a_2 - a_1 = a_3 a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1}}$$

2.Término n-ésimo (a_n)

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r}$$

3.Número de términos (n)

$$\boxed{n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1}$$

4.Términos equidistantes de los extremos (a_x y a_y)

$$\div\, \underbrace{a_1 . \ldots .}_{\text{"m" términos}} a_x . \ldots . a_y \underbrace{. \ldots . a_n}_{\text{"m" términos}}$$

$$\boxed{a_x + a_y = a_1 + a_n}$$

5.Término central (a_c)

Siendo "n" impar, la P.A. admite término central.

$$\boxed{a_c = \frac{a_1 + a_n}{2}}$$

6.Suma de los "n" primeros términos de una P.A. (S_n)

6.1.

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right).n$$

6.2.

$$S_n = \left[\frac{2a_1 + (n-1).r}{2}\right].n$$

Medios Aritméticos

Son los términos de una P.A. comprendido entre sus extremos, veamos un **Ejemplo:**

$$\div 3.\underbrace{7.11.15.19.23.27}_{\text{Medios aritméticos}}.31$$

Interpolación de Medios Aritméticos

Consiste en formar una P.A., para lo cual se debe conocer los términos extremos y el número de medios que se quiere interpolar.

Sea la progresión aritmética:

$$\div a.\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{Medios aritméticos}}.b$$

Por fórmula: $a_n = a_1 + (n-1)r$
Reemplazando:b = a + (m+1)r

$$r = \frac{b-a}{m+1}$$

Fórmula cuyo nombre es razón de interpolación.

Progresión armónica (P. H.)

Es aquella sucesión ordenada, donde ninguno de sus términos es cero y los recíprocos de los mismos forman una progresión aritmética.

Si la sucesión:

$$a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots\ldots;\ a_n$$

es una progresión armónica, se verifica lo siguiente:

$$\div \frac{1}{a_1}.\frac{1}{a_2}.\frac{1}{a_3}.\ \ldots\ .\frac{1}{a_n}$$

Progresión geométrica (P.G.)

Es aquella sucesión ordenada en la cual el primer término es diferente de cero y se caracteriza porque cualquier término, excepto el primero, es igual al término anterior multiplicado por un valor constante llamado razón de la progresión.

Representación de una P.G.

$$\div\div\ t_1 : t_2 : t_3 : \ldots\ldots : t_n$$

$$\div\div\ t_1 : t_1q : t_2q^2 : \ldots\ldots : t_1q^{n-1}$$

Donde:

$\div\div$ = Inicio de la progresión.
:= Separación de términos.
t_1 = Primer término.
t_n = Término n-ésimo.
n= Número de términos.
q= Razón de la P.G.

Clases de P.G.

1.Si: q > 1, la PG. es creciente.
2.Si: 0 < q < 1, la P.G. es decreciente.
3.Si: q < 0, la P.G. es oscilante.

Propiedades de una P.G.

Dada la siguiente progresión geométrica,

$$\div\div\ t_1 : t_2 : t_3 : \ldots\ldots : t_{n-1} : t_n$$

se cumple:

1.Razón (q)

$$q=\frac{t_2}{t_1}=\frac{t_3}{t_2}=...=\frac{t_n}{t_{n-1}}$$

2.Término n-ésimo (t_n)

$$t_n=t_1.q^{n-1}$$

3.Número de términos (n)

Teniendo en cuenta que t_n, t_1 y q son positivos.

$$n=\frac{Log(t_n)-Log(t_1)}{Log(q)}+1$$

4.Términos equidistantes de los extremos (t_x y t_y)

$$\div\div\ \underbrace{t_1:...:t_x}_{\text{"m" términos}}:...:\underbrace{t_y:...:t_n}_{\text{"m" términos}}$$

$$t_x.t_y=t_1.t_n$$

5.Término Central (t_c), siendo "n" impar, la P.G. admite término central

$$t_C=\sqrt{t_1.t_n}$$

6.Suma de los "n" primeros términos de una P.G. (S_n)

$$S_n=t_1.\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right) \qquad q\neq 1$$

7.Suma límite (S_{lim})

Para P.G. de infinitos términos, es decir en caso de que $n\to\infty$.

$$S_{Lim}=\frac{t_1}{1-q} \qquad -1<q<1$$

8.Producto de los "n" primeros términos de una P.G. (P_n)

$$P_n=\sqrt{(t_1\cdot t_n)^c}$$

Medios geométricos

Son los términos de una P.G. comprendidos entre sus extremos, veamos un **Ejemplo:**

$$\div\div\ 1:\underbrace{2:4:8:16:32}_{\text{Medios geométricos}}:64$$

Interpolación de medios geométricos

Consiste en formar una P.G., para lo cual se debe conocer los términos extremos y el número de medios que se quiere interpolar.

Sea la progresión geométrica:

$$\div\div\ a:\underbrace{...\ ....\ ....}_{\text{"m" medios geométricos}}:b$$

Por fórmula: $t_n=t_1q^{n-1}$

Reemplazando: $b=a.q^{m+1}$

$$q=\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$$

Fórmula cuyo nombre es razón de interpolación.

Álgebra


Academia
Raimondi
... siempre los primeros
Informes e Inscripciones:
Plaza San Francisco N° 138
Telf.: 247458 y 224961
Cusco
www.academiaraimondi.pe
You
Tube